Das folgende Differenzenschema verdeutlicht noch einmal die Voraussetzungen zu dieser Aufgabe.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
a_n & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 \dots \\
\Delta & & \Delta(a_1) & & \Delta(a_2) & & \Delta(a_3) & & \Delta(a_4) & & \Delta(a_5) & & \Delta(a_6)\dots & \\
\Delta^2 & & & \Delta^2(a_1) & & \Delta^2(a_2) & & \Delta^2(a_3) & & \Delta^2(a_4) & & \Delta^2(a_5)\ \dots & & \\
\Delta^3 & & & & \Delta^3(a_1) & & \Delta^3(a_2) & & \Delta^3(a_3) & & \Delta^3(a_4)\ \dots & & & \\
\dots & & & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \\
\Delta^k & & & & & c & & c & & c & \dots & & &
\end{array}
$$

3. Formulieren und beweisen Sie die Umkehrung der Aussage in Aufgabe 2.

4. Die k-ten Differenzen der Folge $(a_n)_{n=0,\dots,\infty}$ seien konstant gleich c ($c \neq 0$). Weiterhin sei

$$b_{i,1} := \Delta^i(a_1) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, k$$

Stellen Sie a_n in expliziter Form in Abhängigkeit von a_1, $b_{i,1}$, c und n dar.

Beispiel: Potenzsummen / Faulhabersche Summen

Für die natürlichen Zahlen n und k sei

$$S(n,k) := 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \qquad (= \sum_{i=1}^{n} i^k) \tag{5.10}$$

Aufgaben:

1. Beschreiben Sie $S(n,k)$ (für festes k) rekursiv in n (ohne Auslassungspunkte und ohne Summenzeichen).
2. Schreiben Sie (am besten in der Sprache eines Computeralgebra Systems) ein Programm zur Auswertung von $S(n,k)$.
3. Zeigen Sie: $S(n,k)$ ist stets als Polynom in ~~k~~ vom Grad $k+1$ darstellbar. H n
4. Stellen Sie die entsprechenden Polynome für $k = 0, \dots, 6$ auf.

Einige konkrete Differenzenschemata zu $S(n,k)$:

$k = 1$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$S(n,1)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...
Δ		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Δ^2			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...