Das folgende Differenzenschema verdeutlicht noch einmal die Voraussetzungen zu dieser Aufgabe.

$$
\begin{array}{c|cccccccccccccc}
a_n & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 & \ldots \\
\Delta & & \Delta(a_1) & & \Delta(a_2) & & \Delta(a_3) & & \Delta(a_4) & & \Delta(a_5) & & \Delta(a_6) & \ldots & \\
\Delta^2 & & & \Delta^2(a_1) & & \Delta^2(a_2) & & \Delta^2(a_3) & & \Delta^2(a_4) & & \Delta^2(a_5) & \ldots & & \\
\Delta^3 & & & & \Delta^3(a_1) & & \Delta^3(a_2) & & \Delta^3(a_3) & & \Delta^3(a_4) & \ldots & & & \\
\ldots & & & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & & & & \\
\Delta^k & & & & & \mathrm{c} & & \mathrm{c} & & \mathrm{c} & \ldots & & & &
\end{array}
$$

3. Formulieren und beweisen Sie die Umkehrung der Aussage in Aufgabe 2.

4. Die k-ten Differenzen der Folge $(a_n)_{n=0,\ldots,\infty}$ seien konstant gleich c ($c \neq 0$). Weiterhin sei

$$b_{i,1} := \Delta^i(a_1) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k$$

Stellen Sie a_n in expliziter Form in Abhängigkeit von a_1, $b_{i,1}$, c und n dar.

Beispiel: Potenzsummen / Faulhabersche Summen

Für die natürlichen Zahlen n und k sei

$$S(n,k) := 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \qquad (= \sum_{i=1}^{n} i^k) \tag{5.10}$$

Aufgaben:

1. Beschreiben Sie $S(n,k)$ (für festes k) rekursiv in n (ohne Auslassungspunkte und ohne Summenzeichen).

2. Schreiben Sie (am besten in der Sprache eines Computeralgebra Systems) ein Programm zur Auswertung von $S(n,k)$.

3. Zeigen Sie: $S(n,k)$ ist stets als Polynom in ~~k~~ n vom Grad $k+1$ darstellbar.

4. Stellen Sie die entsprechenden Polynome für $k = 0, \ldots, 6$ auf.

Einige konkrete Differenzenschemata zu $S(n,k)$:

$k = 1$:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccccccccccccc}
n & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & & \ldots \\
\hline
S(n,1) & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & 28 & & 36 & & 45 & & 55 & & 66 & & 78 & & \ldots \\
\Delta & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & & \ldots & \\
\Delta^2 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots & &
\end{array}
$$