10.3.3 Zahlenmuster und vollständige Induktion

Beispiel 10.3.9: Analysieren Sie das folgende Beispiel. Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

```
            1 +  2 =  3
        4 + 5 +  6 =  7 + 8
   9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15
//6/ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24
                 ...
```

Beispiel 10.3.10: Die *Binomialkoeffizienten* werden für natürliche Zahlen n und k in der Regel folgendermaßen definiert

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{10.20}$$

In der deutschen Sprache wird der Ausdruck $\binom{n}{k}$ als „n über k“ ausgesprochen. In der englischen Aussprache „n choose k“ kommt sehr schön zu Ausdruck, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ genau die Anzahl der Möglichkeiten darstellt, eine k-elementige Menge aus einer n-elementigen Menge auszuwählen (vgl. Beispiel 10.3.13). In die Definition der Binomialkoeffizienten fließt augenscheinlich die *Fakultätsfunktion* und deren Definition ein, die ihrerseits im engen Zusammenhang mit dem *Permutations*-Begriff steht:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \tag{10.21}$$

Wie bei vielen anderen Funktionen stellt sich auch bei der Fakultätsfunktion die Frage, was ihr Funktionswert für das Argument $n = 0$ sein sollte. Es gibt gute Gründe[20] dafür, 0! als 1 zu definieren. Für die Binomialkoeffizienten folgt daraus insbesondere, dass $\binom{n}{k}$ auch für den Fall $k = 0$ „ordentlich“ definiert ist und dass der Funktionswert gleich 1 ist. Auch $\binom{0}{0}$ ist dementsprechend gleich 1.

Aufgaben: Geben Sie zu den folgenden fünf Gleichungen jeweils ein (nichttriviales) Zahlenbeispiel an (d.h. n und k jeweils mindestens gleich 3) und zeigen Sie danach allgemein:

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{10.22}$$
- $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \tag{10.23}$$

[20] Diese Gründe hängen meist mit dem Hankelschen Permanenzprinzip zusammen (*Hermann Hankel*, 1839–1873; siehe: Princip der Permanenz formaler Gesetze in Hankel 1867, I §3)