Jochen Ziegenbalg

Figurierte Zahlen

Veranschaulichung als heuristische Strategie

Vorwort

Das Manuskript zu diesem Buch ist aus einer Materialsammlung entstanden, die ich für die Sommerschule *Lust auf Mathematik (2017)* erstellt habe. Die Sommerschule wird von der Humboldt-Universität zu Berlin organisiert, um mathematisch besonders interessierten Schülern (in der Regel aus dem 11. Schuljahr) Anregungen zu geben, die über den lehrplanmäßigen Schulstoff hinausgehen.[1]

Aus dieser Zielsetzung resultiert der elementare, anschauliche und z.T. sehr ausführlich gehaltene Stil dieses Buches. Von den Möglichkeiten, mathematikhistorische Anknüpfungspunkte in die Darstellung mit einzubeziehen, wurde reichlich Gebrauch gemacht. Es entspricht meiner Überzeugung, dass zu einer echten mathematischen Bildung auch (altersgemäße) Kenntnisse über die historische Entwicklung der Mathematik gehören[2].

Insgesamt geht der vorliegende Text deutlich über das hinaus, was in einem einwöchigen „Sommerschul"-Projekt möglich ist. Die einzelnen Kapitel sind aber im Sinne einer „flachen Hierarchie" weitgehend unabhängig voneinander und können in fast beliebiger Reihenfolge ausgewählt und bearbeitet werden.

Mathematische Texte sind oft nach dem Prinzip der maximalen „Redundanzfreiheit" verfasst. Nicht so dieser Text, denn es gilt: Lässt sich ein und derselbe Sachverhalt auf verschiedenen Wegen ermitteln, begründen oder beweisen, so schafft dies Vertrauen in die gewählten Methoden und führt gelegentlich sogar zu neuen Erkenntnissen. Dies ist der Kern einer in der Mathematik oft angewandten Methode der Plausibilitätsprüfung, auch „Probe" genannt. Geeignete Proben bringen nicht unbedingt immer neue Erkenntnisse, aber sie stabilisieren das Wissen – und vor allem: Sie sind auch im „Selbst-Test-Verfahren" möglich. Der Lernende kann

[1] Das System der Sommerschulen ist auf den folgenden Internetseiten ausführlich beschrieben: `http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/de/projekte/laufende/sommerschulen`

[2] Der Mathematikhistoriker H. Wußing formuliert es folgendermaßen (vgl. Wußing 1979, Vorlesung 1): *„Keine wissenschaftliche Disziplin würde mehr verlieren als die Mathematik, wenn man sie von ihrer Geschichte trennen würde."*

sie für sich selbst durchführen; er benötigt keine externe Autorität, die ihm sagt „richtig“ oder „falsch“.

Schließlich sei noch auf den folgenden Aspekt hingewiesen: Der Mathematik kommt im Bildungsprozess grundsätzlich eine aufklärerische Aufgabe zu. Dazu gehört traditionell die Schulung des Denkens, aber auch die Sinnes- und Wahrnehmensschulung. In der letzten Zeit gewinnt diese Aufgabe im Zusammenhang mit dem Strom an Informationen und Desinformationen, denen der Einzelne heute ausgesetzt ist, eine immer größere Bedeutung.

Mathematik kann viel dazu beitragen, das Wissen darüber zu bereichern, dass und wie manche Bilder und Graphiken (z.B. optische Täuschungen – aber nicht nur diese) geeignet sind, absichtlich oder unabsichtlich falsche Sachverhalte zu vermitteln bzw. zu suggerieren. Mathematisches Denken und mathematische Methoden können dazu beitragen, nicht nur Scheinargumente zu analysieren und zu entlarven, sondern auch „Scheinwelten“ zu erkennen und von der realen Welt unterscheiden zu lernen.

Manches von dem, was sich auf den folgenden Seiten wiederfindet, habe ich im Verlauf der Entstehung des Buches *Arithmetik als Prozess* (Wittmann et al. 2004) gelernt. Ich bin Erich Ch. Wittmann dankbar für die vielen intensiven und anregenden Gespräche, die wir dabei geführt haben.

Für die kompetente und außerordentlich hilfreiche verlagsseitige Betreuung dieser Veröffentlichung sei Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch und Frau Barbara Gerlach ganz herzlich gedankt.

Berlin im Januar 2018 Jochen Ziegenbalg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

„*Verstehbar erklären ist wichtiger als vollständiges Deduzieren.*“
Benno Artmann (deutscher Mathematiker, 1933–2010)

Der einzigartige erkenntnistheoretische Charakter der Mathematik, in dessen Zentrum der mathematische Beweis steht, entwickelte sich, historisch gesehen, im Kulturkreis der griechischen Antike. Dabei spielte die geometrische Veranschaulichung anhand von Zahlenmustern eine zentrale Rolle. Die Methode der *figurierten Zahlen*[3] setzte, auf der Mathematik der Babylonier aufbauend, etwa zur Zeit von *Pythagoras von Samos* (um ca. 600–500 v.Chr.)[4] ein. Die Lehre der Pythagoreer von „Gerade und Ungerade“ lieferte Erkenntnisse bis hin zu den vollkommenen Zahlen (vgl. van der Waerden 1966).

Der Neupythagoreer *Nikomachos von Gerasa* (ca. 60–120 n.Chr.) beschäftigte sich intensiv mit Dreiecks-, Vierecks- und Fünfeckszahlen. Geschicktes Legen von Punktmustern, oft auf der Basis der Verwendung von Winkelhaken („Gnomonen“), lieferte in unmittelbarer Weise nichttriviale Erkenntnisse.

---

[3] Der Begriff „figurierte Zahlen“ ist nicht normiert und wird unterschiedlich gebraucht. Im engeren Sinne wird er gelegentlich nur für die Polygonalzahlen (vgl. Kapitel 4) verwendet. In diesem Buch wird der Begriff der figurierten Zahlen aber weiter gefasst. Er soll alle (in der Regel ganzzahligen) Zahlenfolgen umfassen, die sich aus gewissen geometrischen Mustern oder Strukturen ergeben. In diesem Sinne sind z.B. auch die Fibonacci-Zahlen (Kapitel 6) oder die Betrachtungen zur Phyllotaxis (Kapitel 8) ergiebige Quellen für figurierte Zahlen (vgl. Gazalé 1999).

[4] Pythagoras ist eine legendenumwobene historische Gestalt; er soll u.a. den stark metaphysisch orientierten Geheimbund der Pythagoreer gegründet haben.

Auch große Mathematiker arbeiteten oft mit der Technik der figurierten Zahlen oder vergleichbarer Methoden. Von *Carl Friedrich Gauß* (1777–1855), einem der größten Mathematiker aller Zeiten, wird berichtet, dass er als junger Schüler die Aufgabe seines Lehrers, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, löste, indem er die Zahlenreihen 1, 2, 3, ..., 100 zweimal untereinander aufschrieb; einmal in der natürlichen und einmal in der umgekehrten Reihenfolge. Er erkannte, dass jede der dadurch gegebenen 100 „Spaltensummen“ gleich 101 war, und ermittelte so in kürzester Zeit das Ergebnis. Diese Vorgehensweise lässt sich problemlos verallgemeinern und liefert in paradigmatischer[5] Weise die Formel $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot (n + 1)/2$.

Wenn sich heute auch all diese Ergebnisse formal auf der Basis der vollständigen Induktion beweisen lassen, so liefert die Technik der figurierten Zahlen in der Regel den Ausgangspunkt für den kognitiven Prozess, der zu den entsprechenden Hypothesenbildungen führt. Oft sind auch die Begründungen mit Hilfe der Methode der figurierten Zahlen so unmittelbar klar und einleuchtend, dass sich ein formaler Beweis erübrigt.

Wir werden sehen, dass sich bei den im Folgenden behandelten Themenbereichen *figurierte Zahlen*, *Punktmuster*, *Zahlenmuster*, *Folgen und Reihen* und *vollständige Induktion* die jeweils angewandten Methoden gegenseitig ergänzen und befruchten. Durch die Betrachtung von Punkt-, Rechtecks- und Zahlenmustern gelangt man fast automatisch zu problemspezifischen, charakteristischen Zahlenfolgen. Als wichtige Instrumente zur Analyse dieser Folgen werden wir dabei die *Differenzenfolgen*, *Differenzenschemata* und *Differenzengleichungen* kennenlernen.

Wir haben es in diesem Buch mit einem Themenbereich zu tun, der große Überschneidungen zur Algorithmik und zur endlichen, diskreten Mathematik aufweist. Geeignete Werkzeuge, um dabei Experimente durchzuführen, sind alle Arten von Computerprogrammen[6] und insbesondere die außerordentlich leistungsfähigen modernen Computeralgebra Systeme. Dieses Buch versteht sich (abgesehen von einigen „homöopathischen“ Hinweisen) zwar nicht als eine Einführung in die Nutzung von Computeralgebra Systemen; der Leser wird aber ausdrücklich dazu ermutigt, eigene Experimente mit derartigen Systemen durchzuführen[7].

[5]Zum Begriff des Paradigmatischen vgl. Abschnitt 3.2.1.
[6]Selbstgeschriebene Programme sind dabei besonders wertvoll.
[7]Es gibt sehr leistungsfähige Computeralgebra Systeme durchaus auch im *public domain* Bereich.