

Jochen Ziegenbalg

Figurierte Zahlen

Veranschaulichung als heuristische Strategie

Vorwort

Das Manuskript zu diesem Buch ist aus einer Materialsammlung entstanden, die ich für die Sommerschule *Lust auf Mathematik (2017)* erstellt habe. Die Sommerschule wird von der Humboldt-Universität zu Berlin organisiert, um mathematisch besonders interessierten Schülern (in der Regel aus dem 11. Schuljahr) Anregungen zu geben, die über den lehrplanmäßigen Schulstoff hinausgehen.¹

Aus dieser Zielsetzung resultiert der elementare, anschauliche und z.T. sehr ausführlich gehaltene Stil dieses Buches. Von den Möglichkeiten, mathematikhistorische Anknüpfungspunkte in die Darstellung mit einzubeziehen, wurde reichlich Gebrauch gemacht. Es entspricht meiner Überzeugung, dass zu einer echten mathematischen Bildung auch (altersgemäße) Kenntnisse über die historische Entwicklung der Mathematik gehören².

Insgesamt geht der vorliegende Text deutlich über das hinaus, was in einem einwöchigen „Sommerschul“-Projekt möglich ist. Die einzelnen Kapitel sind aber im Sinne einer „flachen Hierarchie“ weitgehend unabhängig voneinander und können in fast beliebiger Reihenfolge ausgewählt und bearbeitet werden.

Mathematische Texte sind oft nach dem Prinzip der maximalen „Redundanzfreiheit“ verfasst. Nicht so dieser Text, denn es gilt: Lässt sich ein und derselbe Sachverhalt auf verschiedenen Wegen ermitteln, begründen oder beweisen, so schafft dies Vertrauen in die gewählten Methoden und führt gelegentlich sogar zu neuen Erkenntnissen. Dies ist der Kern einer in der Mathematik oft angewandten Methode der Plausibilitätsprüfung, auch „Probe“ genannt. Geeignete Proben bringen nicht unbedingt immer neue Erkenntnisse, aber sie stabilisieren das Wissen – und vor allem: Sie sind auch im „Selbst-Test-Verfahren“ möglich. Der Lernende kann

¹Das System der Sommerschulen ist auf den folgenden Internetseiten ausführlich beschrieben: <http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/de/projekte/laufende/sommerschulen>

²Der Mathematikhistoriker H. Wußing formuliert es folgendermaßen (vgl. Wußing 1979, Vorlesung 1): „Keine wissenschaftliche Disziplin würde mehr verlieren als die Mathematik, wenn man sie von ihrer Geschichte trennen würde.“

sie für sich selbst durchführen; er benötigt keine externe Autorität, die ihm sagt „richtig“ oder „falsch“.

Schließlich sei noch auf den folgenden Aspekt hingewiesen: Der Mathematik kommt im Bildungsprozess grundsätzlich eine aufklärerische Aufgabe zu. Dazu gehört traditionell die Schulung des Denkens, aber auch die Sinnes- und Wahrnehmungsschulung. In der letzten Zeit gewinnt diese Aufgabe im Zusammenhang mit dem Strom an Informationen und Desinformationen, denen der Einzelne heute ausgesetzt ist, eine immer größere Bedeutung.

Mathematik kann viel dazu beitragen, das Wissen darüber zu bereichern, dass und wie manche Bilder und Graphiken (z.B. optische Täuschungen – aber nicht nur diese) geeignet sind, absichtlich oder unabsichtlich falsche Sachverhalte zu vermitteln bzw. zu suggerieren. Mathematisches Denken und mathematische Methoden können dazu beitragen, nicht nur Scheinargumente zu analysieren und zu entlarven, sondern auch „Scheinwelten“ zu erkennen und von der realen Welt unterscheiden zu lernen.

Manches von dem, was sich auf den folgenden Seiten wiederfindet, habe ich im Verlauf der Entstehung des Buches *Arithmetik als Prozess* (Wittmann et al. 2004) gelernt. Ich bin Erich Ch. Wittmann dankbar für die vielen intensiven und anregenden Gespräche, die wir dabei geführt haben.

Für die kompetente und außerordentlich hilfreiche verlagsseitige Betreuung dieser Veröffentlichung sei Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch und Frau Barbara Gerlach ganz herzlich gedankt.

Berlin im Januar 2018

Jochen Ziegenbalg

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Einleitung	1
2 Historische Anfänge	3
2.1 Die Arithmetik der Spielsteine	3
2.2 Gnomone	4
3 Einführende Beispiele, Potenzsummen	9
3.1 Dreieckszahlen / Triagonalzahlen	9
3.2 Viereckszahlen / Quadratzahlen	11
3.2.1 Quadratzahlen, ungerade Zahlen und die Gnomon-Methode	11
3.2.2 Summen von Quadratzahlen	13
3.3 Kubikzahlen	14
3.3.1 Eine weitere Veranschaulichung von Quadratsummen	17
3.3.2 Zahlenmuster aus ungeraden Zahlen und Quadratzahlen	21
4 Polygonal- und Pyramidalzahlen	23
4.1 Beispiele	23
4.2 Das Konstruktionsprinzip der Polygonalzahlen	24
4.3 Die explizite Darstellung der Polygonalzahlen	25
4.4 Pyramidalzahlen	27

5	Systematisierung durch Differenzenbildung	31
5.1	Differenzenfolgen von Polygonal- und Pyramidalzahlen	31
5.2	Allgemeine Differenzenfolgen	33
5.3	Ein kleines Szenario zum Differenzenkalkül	37
6	Figurierte Fibonacci-Zahlen	39
6.1	Historischer Kontext	39
6.2	Definition der Fibonacci-Zahlen in heutiger Notation	42
6.3	Veranschaulichung der definierenden Gleichung	43
6.4	Weitere auf den Fibonacci-Zahlen basierende Veranschaulichungen .	44
6.4.1	Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci-Zahlen	44
6.4.2	Fibonacci-Zahlen und optische Täuschungen	46
6.5	Die Formel von Binet	48
6.6	Konkrete Berechnung der Fibonacci-Zahlen	49
6.6.1	Rekursives Verfahren	50
6.6.2	Iteratives Verfahren	52
6.6.3	Berechnung mit Hilfe der Formel von Binet	53
6.6.4	Berechnung der Fibonacci-Zahlen mit Matrizen	54
6.6.5	Teile und Herrsche	54
6.6.6	Abschließende Bewertung der Verfahren zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen	56
7	Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt	57
7.1	Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen	57
7.2	Der Goldene Schnitt	61
8	Phyllotaxis	63
8.1	Erste Beobachtungen	63
8.2	Modell und Simulation	66
8.3	Zusammenfassung	71

9	Lineare Differenzgleichungen und die Herleitung der Formel von Binet	75
9.1	Lineare Differenzgleichungen erster Ordnung	75
9.2	Lineare Differenzgleichungen zweiter Ordnung	76
10	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	79
10.1	Die natürlichen Zahlen	80
10.2	Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion	81
10.3	Beispiele zur vollständigen Induktion	83
10.3.1	Einige typische Beispiele	83
10.3.2	Einige nicht so ganz typische Beispiele	88
10.3.3	Zahlenmuster und vollständige Induktion	90
10.3.4	Vollständige Induktion im Zusammenhang mit Mengen	94
10.3.5	Vollständige Induktion im Zusammenhang mit Beispielen aus der Geometrie	98
10.3.6	Definition durch vollständige Induktion	102
10.3.7	Vollständige Induktion und andere Beweistechniken	103
10.3.8	Scheinbeweise, Lustiges und Merkwürdiges	105
10.3.9	Ein frühes historisches Beispiel zur vollständigen Induktion	106
10.3.10	Muss es immer vollständige Induktion sein?	107
A	Analyse einiger ausgewählter Konfigurationen	111
A.1	Summen ungerader Zahlen	111
A.2	Pascalsches Dreieck und Fibonacci-Zahlen	112
A.3	Summen von Kubikzahlen	113
	Literaturhinweise	119
	Bildnachweise	123
	Index	125

Kapitel 1

Einleitung

*„Verstehbar erklären ist wichtiger
als vollständiges Deduzieren.“*

*Benno Artmann (deutscher Mathe-
matiker, 1933–2010)*

Der einzigartige erkenntnistheoretische Charakter der Mathematik, in dessen Zentrum der mathematische Beweis steht, entwickelte sich, historisch gesehen, im Kulturkreis der griechischen Antike. Dabei spielte die geometrische Veranschaulichung anhand von Zahlenmustern eine zentrale Rolle. Die Methode der *figurierten Zahlen*³ setzte, auf der Mathematik der Babylonier aufbauend, etwa zur Zeit von *Pythagoras von Samos* (um ca. 600–500 v.Chr.)⁴ ein. Die Lehre der Pythagoreer von „Gerade und Ungerade“ lieferte Erkenntnisse bis hin zu den vollkommenen Zahlen (vgl. van der Waerden 1966).

Der Neupythagoreer *Nikomachos von Gerasa* (ca. 60–120 n.Chr.) beschäftigte sich intensiv mit Dreiecks-, Vierecks- und Fünfeckszahlen. Geschicktes Legen von Punktmustern, oft auf der Basis der Verwendung von Winkelhaken („Gnomonen“), lieferte in unmittelbarer Weise nichttriviale Erkenntnisse.

³Der Begriff „figurierte Zahlen“ ist nicht normiert und wird unterschiedlich gebraucht. Im engeren Sinne wird er gelegentlich nur für die Polygonalzahlen (vgl. Kapitel 4) verwendet. In diesem Buch wird der Begriff der figurierten Zahlen aber weiter gefasst. Er soll alle (in der Regel ganzzahligen) Zahlenfolgen umfassen, die sich aus gewissen geometrischen Mustern oder Strukturen ergeben. In diesem Sinne sind z.B. auch die Fibonacci-Zahlen (Kapitel 6) oder die Betrachtungen zur Phyllotaxis (Kapitel 8) ergiebige Quellen für figurierte Zahlen (vgl. Gazalé 1999).

⁴Pythagoras ist eine legendenumwobene historische Gestalt; er soll u.a. den stark metaphysisch orientierten Geheimbund der Pythagoreer gegründet haben.

Auch große Mathematiker arbeiteten oft mit der Technik der figurierten Zahlen oder vergleichbarer Methoden. Von *Carl Friedrich Gauß* (1777–1855), einem der größten Mathematiker aller Zeiten, wird berichtet, dass er als junger Schüler die Aufgabe seines Lehrers, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, löste, indem er die Zahlenreihen 1, 2, 3, ..., 100 zweimal untereinander aufschrieb; einmal in der natürlichen und einmal in der umgekehrten Reihenfolge. Er erkannte, dass jede der dadurch gegebenen 100 „Spaltensummen“ gleich 101 war, und ermittelte so in kürzester Zeit das Ergebnis. Diese Vorgehensweise lässt sich problemlos verallgemeinern und liefert in paradigmatischer⁵ Weise die Formel $1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot (n + 1)/2$.

Wenn sich heute auch all diese Ergebnisse formal auf der Basis der vollständigen Induktion beweisen lassen, so liefert die Technik der figurierten Zahlen in der Regel den Ausgangspunkt für den kognitiven Prozess, der zu den entsprechenden Hypothesenbildungen führt. Oft sind auch die Begründungen mit Hilfe der Methode der figurierten Zahlen so unmittelbar klar und einleuchtend, dass sich ein formaler Beweis erübrigt.

Wir werden sehen, dass sich bei den im Folgenden behandelten Themenbereichen *figurierte Zahlen*, *Punktmuster*, *Zahlenmuster*, *Folgen und Reihen* und *vollständige Induktion* die jeweils angewandten Methoden gegenseitig ergänzen und befruchten. Durch die Betrachtung von Punkt-, Rechtecks- und Zahlenmustern gelangt man fast automatisch zu problemspezifischen, charakteristischen Zahlenfolgen. Als wichtige Instrumente zur Analyse dieser Folgen werden wir dabei die *Differenzfolgen*, *Differenzenschemata* und *Differenzgleichungen* kennenlernen.

Wir haben es in diesem Buch mit einem Themenbereich zu tun, der große Überschneidungen zur Algorithmik und zur endlichen, diskreten Mathematik aufweist. Geeignete Werkzeuge, um dabei Experimente durchzuführen, sind alle Arten von Computerprogrammen⁶ und insbesondere die außerordentlich leistungsfähigen modernen Computeralgebra Systeme. Dieses Buch versteht sich (abgesehen von einigen „homöopathischen“ Hinweisen) zwar nicht als eine Einführung in die Nutzung von Computeralgebra Systemen; der Leser wird aber ausdrücklich dazu ermutigt, eigene Experimente mit derartigen Systemen durchzuführen⁷.

⁵Zum Begriff des Paradigmatischen vgl. Abschnitt 3.2.1.

⁶Selbstgeschriebene Programme sind dabei besonders wertvoll.

⁷Es gibt sehr leistungsfähige Computeralgebra Systeme durchaus auch im *public domain* Bereich.