Prof. Dr. J. Ziegenbalg
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Karlsruhe

email: ziegenbalg@ph-karlsruhe.de
homepage: http://www.ph-karlsruhe.de/~ziegenbalg/

Zum Begriff der Gruppe, dem Satz von Lagrange und den Sätzen von Fermat und Euler

Definitionen, Grundbegriffe, Beispiele

Definition: Eine *Gruppe* ist ein Tripel $(G,\circ,e)$ bestehend aus einer Menge G, einer zweistelligen Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ und einem speziellen Element $e \in G$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Verknüpfung $\circ$ ist *assoziativ*; d.h., für alle $a,b,c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

(ii) Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = e \circ x = x$.

(iii) Zu jedem Element $x \in G$ gibt es ein Element $y \in G$ mit der Eigenschaft $x \circ y = y \circ x = e$.

Definitionen:

(i) Falls für alle $a,b \in G$ stets $a \circ b = b \circ a$ gilt, so heißt die Gruppe *kommutativ* oder auch *Abelsche*[1] Gruppe.

(ii) Falls G eine endliche Menge ist, so heißt $(G,\circ,e)$ *endliche* Gruppe; andernfalls *unendliche* Gruppe.

(iii) Die Mächtigkeit (d.h. im Falle einer endlichen Gruppe die Elementezahl) der Gruppe G heißt die *Ordnung* von G.

Im Zeichen: $|G| = Ordnung\ \ von\ \ G$.

Bemerkungen:

(i) Die Menge G wird auch als die *Trägermenge* der Gruppe bezeichnet. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, spricht man oft auch kurz von der Gruppe *G*.

(ii) Als Verknüpfungssymbol für die (zweistellige) Verknüpfung wird auch das gewöhnliche Multiplikationszeichen $(\cdot)$ und das Additionszeichen $(+)$ verwendet; letzteres meist bei kommutativen Gruppen. Das Multiplikationszeichen wird gelegentlich auch

[1] Niels Henrik Abel (1802-1829), norwegischer Mathematiker

weggelassen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. An Stelle von $a \circ b$ wird also auch $a \cdot b$, $a + b$ oder ab geschrieben.

(iii) Das spezielle Element $e \in G$ heißt *neutrales Element*. Wird die Gruppe multiplikativ geschrieben, so verwendet man auch das Symbol 1 für das neutrale Element; wird die Gruppe additiv geschrieben, so verwendet man meist das Symbol 0 für das neutrale Element.

(iv) Sind $x, y \in G$ mit $x \circ y = y \circ x = e$, so heißen x und y zueinander *invers*.

(v) Die in der Definition des Gruppenbegriffs geforderten Eigenschaften ließen sich im Prinzip auch noch etwas „sparsamer“ (d.h. mit etwas weniger Voraussetzungen) formulieren, aber darauf kommt es hier nicht an.

Beispiele:

1. Die Menge D_3 der Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Gruppenverknüpfung und der identischen Abbildung als neutralem Element. Gruppenelemente sind: 3 Drehungen (um 120, 240 und 360 Grad) um den Schwerpunkt; 3 Achsenspiegelungen an den (ortsfesten) Mittelsenkrechten. Neutrales Element: Die Drehung um 360 Grad (= 0 Grad), also die *identische Abbildung*. Diese Gruppe wird auch als *Diedergruppe* D_3 bezeichnet.

Etwas genauer:

In der folgenden Abbildung seien A, B und C (ortsfeste) Punkte in der Ebene, die ein gleichseitiges Dreieck bestimmen. S sei der Schwerpunkt dieses Dreiecks. Weiterhin seien:

δ_1 die Drehung um S (entgegen dem Uhrzeigersinn) um 120 Grad,

δ_2 die Drehung um S um 240 Grad, und

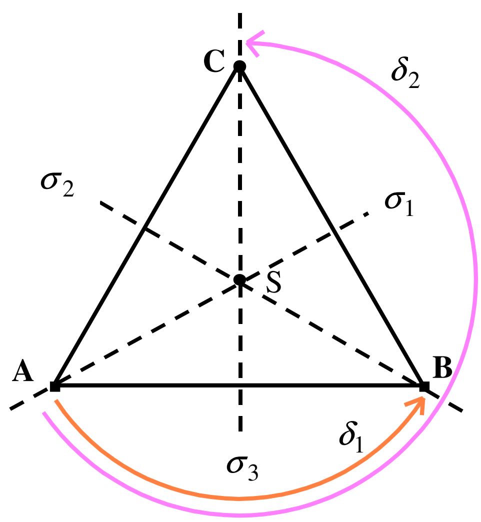
δ_0 die Drehung um S um 360 Grad (= 0 Grad).

Schließlich seien

σ_1 die (Achsen-) Spiegelung an der (ortsfesten) Achse AS,

σ_2 die Spiegelung an der Achse BS, und

σ_3 die Spiegelung an der Achse CS.



Bei endlichen Gruppen lässt sich die Wirkung der Verknüpfung vollständig in einer tabellenartigen Form, der sogenannten *Verknüpfungstafel* darstellen. Die im folgenden dargestellte Verknüpfungstafel zur Gruppe D_3 ist folgendermaßen zu lesen: Das Ergebnis des Produkts

Spalten-Element *mal* Zeilen-Element

ist im „Kreuzungspunkt" dargestellt. Dabei ist zuerst die Abbildung in der (linken) Spalte und dann die Abbildung in der (oberen) Zeile auszuführen.

Beispiel: $\delta_1 \circ \sigma_2 = \sigma_3$

$\circ$	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_0	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_1	δ_2	δ_0	σ_2	σ_3	σ_1
δ_2	δ_2	δ_0	δ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	δ_0	δ_2	δ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	δ_1	δ_0	δ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	δ_2	δ_1	δ_0

Verwendet man an Stelle eines gleichseitigen Dreiecks ein regelmässiges n-Eck als Ausgangsfigur, so gibt es n „Deck"-Drehungen und n Spiegelungen, welche das n-Eck in sich überführen. Sie bilden die Trägermenge der (aus $2 \cdot n$ Elementen bestehenden) Diedergruppe D_n.

2. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition von ganzen Zahlen als Gruppenverknüpfung und der Zahl Null (0) als neutralem Element.
3. Die Menge $\mathbb{B}$ der Brüche (d.h. der positiven rationalen Zahlen) mit der gewöhnlichen Multiplikation von Brüchen als Gruppenverknüpfung und der Zahl Eins (1) als neutralem Element.
4. Ist M eine Menge, so ist die Menge der *Permutationen* von M eine Gruppe mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Gruppenverknüpfung und der identischen Abbildung als neutralem Element.

   Permutationen endlicher Mengen können in der Form von Zuordnungstabellen dargestellt werden; die Permutation σ z.B. in der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & j & k \\ f & e & c & k & b & g & j & h & a & d \end{pmatrix}$$

   Dabei ist $\sigma(a) = f$, $\sigma(b) = e$, $\sigma(c) = c$, $\ldots$, $\sigma(k) = d$

   Zyklenschreibweise der Permutation σ: $(a, f, g, j)(b, e)(c)(d, k)(h)$

   Zyklen der Länge 2 heißen *Transpositionen*. Zyklen der Länge 1 werden meist weggelassen; d.h. $\sigma = (a, f, g, j)(b, e)(d, k)$. Ein Element x mit $\sigma(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Permutation σ. Permutationen ohne Fixpunkte heißen *fixpunktfrei*.

   Mit S_n wird die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ bezeichnet. Sie heißt die *symmetrische Gruppe* über der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Satz: $|S_n| = n!$ (*Beweis*: Übung)

Satz: Die Gruppe D_3 ist strukturgleich zur Gruppe S_3.

Aufgabe: Auch wenn bisher keine formale Definition des Begriffs „strukturgleich" gegeben wurde, erläutern Sie, was damit gemeint sein könnte und beweisen Sie den Satz.

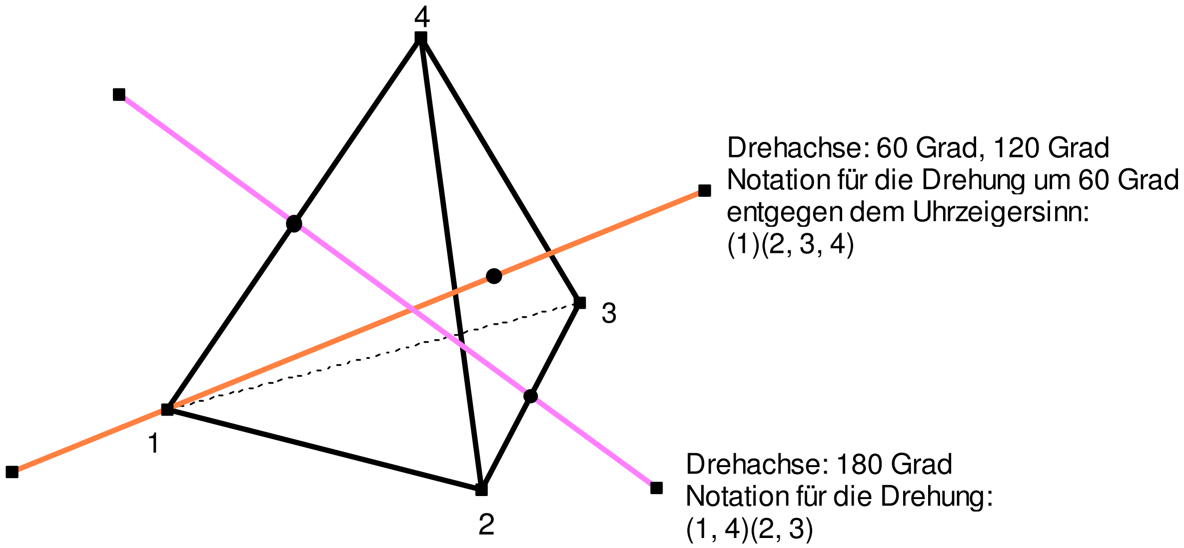
5. Die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (vgl. [Ziegenbalg 2002]) der Restklassen modulo n bildet zusammen mit der Restklassenaddition eine endliche, kommutative Gruppe mit neutralem Element $\bar{0}$.
Beispiel: $n = 6$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

6. Die Menge $\mathcal{T}$ der Deckabbildungen eines (regelmäßigen) Tetraeders, zusammen mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Gruppenverknüpfung. $\mathcal{T}$ besitzt die folgenden 12 Elemente:

* Drehungen jeweils um die Achse durch eine Ecke und den Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seite um 60 bzw. 120 Grad. Dies sind 8 $(= 4 \cdot 2)$ Drehungen (eine davon ist in der Abbildung anhand der roten Achse dargestellt).
* Drehungen jeweils um die Achse durch die Seitenmitten zweier gegenüberliegender Seiten um 180 Grad. Dies sind 3 Drehungen (eine davon ist in der Abbildung anhand der blauen Achse dargestellt).
* die identische Abbildung (neutrales Element).

(Die Gruppe $\mathcal{T}$ wird auch als *Tetraedergruppe* bezeichnet.)



Die Eindeutigkeit der inversen Elemente

Satz (Eindeutigkeit des inversen Elements): Sei $x \in G$. Ist y ein zu x inverses Element und z ein Element von G mit der Eigenschaft $x \circ z = e$, so ist $y = z$.

Beweis: $y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z$.

Bemerkung: Sei $x \in G$. Ein zu x inverses Element y ist also eindeutig bestimmt. Es heißt *das* Inverse von x und wird (in funktionaler Schreibweise) in der Form x^{-1} geschrieben. Es gilt also $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

Im Falle der additiven Schreibweise wird für das Inverse von x in der Form $-x$ geschrieben. Es gilt dann $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Definition: (aggregierende Schreibweisen)

(i) multiplikative Schreibweise – Potenzierung

$$x^1 = x,\ x^2 = x \circ x,\ x^3 = x \circ x \circ x,\ \dots\ ,\ x^n = x \circ x^{n-1},\ \dots$$

$$x^0 = e$$

$$x^{-2} = x^{-1} \circ x^{-1},\ x^{-3} = x^{-1} \circ x^{-1} \circ x^{-1},\ \dots,\ x^{-k} = x^{-1} \circ x^{-(k-1)},\ \dots$$

Hinweis: Permanenzprinzip von Hermann Hankel; siehe: http://www.ph-karlsruhe.de/~ziegenbalg/PermSig.pdf

(ii) additive Schreibweise – Vervielfachung

$$1 \cdot x = x,\ 2 \cdot x = x + x,\ 3 \cdot x = x + x + x,\ \dots\ ,\ n \cdot x = x + (n-1) \cdot x,\ \dots$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$(-2) \cdot x = (-x) + (-x),\ (-3) \cdot x = (-x) + (-x) + (-x),\ \dots,\ (-k) \cdot x = (-x) + (-(k-1))x,\ \dots$$

Die Links-Multiplikation

Definition: Sei $a \in G$. Die Abbildung $l_a : G \to G$ mit $l_a(x) = a \circ x$ heißt *Links-Multiplikation* (genauer eigentlich: *Links-Verknüpfung*) mit dem Element a.

Beispiele:

Gruppe: ($\mathbb{B}$, gewöhnliche Multiplikation, 1): $l_2(x) = 2 \cdot x$

Gruppe: ($\mathbb{Z}$, +, 0): $l_{17}(x) = 17 + x$

Satz: Die Links-Multiplikation ist bijektiv.

Beweis: Die Umkehrabbildung von l_a ist die durch das Inverse von a gegebene Links-Multiplikation $l_{a^{-1}}$. Für alle $x \in G$ gilt also $l_a(l_{a^{-1}}(x)) = l_{a^{-1}}(l_a(x)) = x$.

Untergruppen

Definition: Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge von G mit den Eigenschaften:

(i) $e \in U$

(ii) Für alle $a, b \in U$ gilt $a \circ b \in U$.

(iii) Für alle $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$.

Dann heißt U *Untergruppe* von G.

Im Zeichen: $U \leq G$.

Bemerkungen:

(i) Die Menge U ist also eine Untergruppe von G, wenn sie das neutrale Element von G enthält und bezüglich der Gruppenverknüpfung von G und der Inversenbildung *abgeschlossen* ist.

(ii) Mit anderen Worten: Ist $(U, \circ, e)$ mit der auf U eingeschränkten Verknüpfung von G und mit dem neutralen Element $e \in G$ ebenfalls eine Gruppe, so ist U eine *Untergruppe* von G.

Beispiele: Wir betrachten die Gruppe D_3 der Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Definition des Gruppenbegriffs: Beispiel 1). Ihrer Gruppentafel entnehmen wir die folgenden Untergruppen:

- die „trivialen" Untergruppen: $\{\delta_0\}$ und D_3 selbst,
- die Untergruppen der Ordnung 2: $\{\sigma_1, \delta_0\}$, $\{\sigma_2, \delta_0\}$ und $\{\sigma_3, \delta_0\}$,
- die Untergruppe der Ordnung 3: $\{\delta_1, \delta_2, \delta_0\}$.

$\circ$	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_0	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_1	δ_2	δ_0	σ_2	σ_3	σ_1
δ_2	δ_2	δ_0	δ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	δ_0	δ_2	δ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	δ_1	δ_0	δ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	δ_2	δ_1	δ_0

Aufgabe: Zeigen Sie, dass dies alle Untergruppen von D_3 sind. (Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein beliebiges Element x in einer Untergruppe U von D_3 enthalten ist und ziehen Sie Schlüsse daraus, welche weiteren Elemente noch in U enthalten sein müssen, damit die Untergruppenkriterien erfüllt sind.)

Aufgabe:

(i) Ermitteln Sie alle Untergruppen der Tetraedergruppe $\mathcal{T}$ (siehe Beispiel 6).

(ii) Ermitteln Sie alle Untergruppen der Restklassengruppen $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ für $n = 5, 6, 8$ und 12.

Nebenklassen

Definition: Es sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe von G und a ein beliebiges Element von G. Dann heißt die Menge

$$a \circ U := \{a \circ x \,/\, x \in U\}$$

die durch a gegebene *Links-Nebenklasse* von U.

Bei multiplikativ geschriebenen Gruppen schreibt man meist kurz aU an Stelle von $a \circ U$.

(Entsprechend ist der Begriff der Rechts-Nebenklasse definiert durch: $Ua := \{x \circ a \,/\, x \in U\}$.)

Bemerkung: Offensichtlich ist: $aU = l_a(U)$.

Beispiele: Wir betrachten die Gruppe D_3 der Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks.

Die Links-Nebenklassen der Untergruppe $U := \{\sigma_1, \delta_0\}$ sind:

- $\delta_0 \circ \{\sigma_1, \delta_0\} = \{\sigma_1, \delta_0\}$
- $\delta_1 \circ \{\sigma_1, \delta_0\} = \{\sigma_2, \delta_1\}$
- $\delta_2 \circ \{\sigma_1, \delta_0\} = \{\sigma_3, \delta_2\}$
- $\sigma_1 \circ \{\sigma_1, \delta_0\} = \{\sigma_1, \delta_0\}$ $\quad (= \delta_0 \circ U = U)$
- $\sigma_2 \circ \{\sigma_1, \delta_0\} = \{\delta_1, \sigma_2\}$ $\quad (= \delta_1 \circ U)$
- $\sigma_3 \circ \{\sigma_1, \delta_0\} = \{\delta_2, \sigma_3\}$ $\quad (= \delta_2 \circ U)$

Es gibt also drei Links-Nebenklassen zur Untergruppe $U = \{\sigma_1, \delta_0\}$ von D_3.

Aufgabe: Geben Sie die Links-Nebenklassen der restlichen Untergruppen von D_3 an.

Aufgabe:

(i) Ermitteln Sie die Links-Nebenklassen aller Untergruppen der Tetraedergruppe $\mathcal{T}$ (siehe Beispiel 6).

(ii) Ermitteln Sie die Links-Nebenklassen aller Untergruppen der Restklassengruppen $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ für n= 5, 6, 8 und 12.

(iii) Führen Sie entsprechendes für die Rechts-Nebenklassen durch

Satz: (Eigenschaften von Nebenklassen)

Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Dann gilt

(i) Für alle $x \in G$ gilt: $x \in U \Leftrightarrow xU = U$.

(ii) xU ist stets gleichmächtig zu U.

(iii) Für alle $x, y \in G$ gilt: $xU = yU \Leftrightarrow y^{-1}x \in U$.

(iv) Für alle $y \in G \setminus \mathrm{U}$ gilt: $yU \cap U = \varnothing$.

(v) $G = \bigcup\limits_{x \in G} xU$

Beweis:

(i) "$\Rightarrow$": Es sei $x \in U$. Dann ist (wegen der Abgeschlossenheitseigenschaft von U) $xU = \{x \circ u / u \in U\} \subseteq U$. Weiterhin kann jedes Element $t \in U$ in der Form $t = x \circ u$ (mit einem geeigneten Element $u \in U$) geschrieben werden. Man verwende dazu $u := x^{-1} \circ t$. Also ist $xU = U$.

"$\Leftarrow$": Es sei nun $xU = U$. Dann ist insbesondere $x \circ e \in U$, also $x \in U$.

(ii) Dies folgt aus der Tatsache, dass die Links-Multiplikation als Abbildung bijektiv ist.

(iii) Übung

(iv) (Beweis durch Widerspruch) Angenommen $yU \cap U \neq \varnothing$. Dann gibt es ein Element x mit $x \in yU \cap U$. Daraus folgt: Es gibt ein $t \in U$ mit der Eigenschaft $y \circ t = x$. Daraus folgt $y = x \circ t^{-1} \in U$ – im Widerspruch zur Annahme $y \notin U$.

(v) Für jedes $x \in G$ gilt $x \in xU$.

Bemerkung: Die Eigenschaften (iv) besagt, dass verschiedene Nebenklassen von U *disjunkt* sind.

Die Eigenschaften (iv) und (v) besagen, dass die Gesamtheit der Nebenklassen von U eine *Zerlegung* von G darstellt.

Der Index einer Untergruppe

Definition: Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Die Anzahl der Links-Nebenklassen von U in G heißt der *Index* von U in G.

Im Zeichen: $|G:U| =$ *Index von U in G*.

Beispiel: Die additive Gruppe $\mathbb{Z}_{12} := \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ der Restklassen modulo 12. (Der typographischen Einfachheit halber sind die Restklassen im folgenden Beispiel durch Fettschrift an Stelle der Überstreichung gekennzeichnet.)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**
2	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**
3	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**
4	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**
5	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
6	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
7	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
8	**8**	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
9	**9**	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
10	**10**	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
11	**11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Eine der Untergruppen von $\mathbb{Z}_{12}$ ist $U := \{0, 3, 6, 9\}$. Die Links-Nebenklassen von U sind:

$0+U = \{0, 3, 6, 9\} = U$, $1+U = \{1, 4, 7, 10\}$ und $2+U = \{2, 5, 8, 11\}$

Man beachte: Es gibt 3 Links-Nebenklassen zu je 4 Elementen; 3 * 4 = 12.

$\mathbb{Z}_{12} = U \cup (1+U) \cup (2+U)$ (disjunkte Vereinigung; „Zerlegung“)

Satz von Lagrange[2]: Es sei G eine *endliche* Gruppe und U eine Untergruppe von G. Dann gilt: $|G| = |G:U| \cdot |U|$.

Beweis: Für jede Gruppe G gilt $G = \bigcup\limits_{x \in G} xU$. Da G eine endliche Gruppe ist, gibt es nur endlich viele verschiedene Links-Nebenklassen von U; diese seien mit $g_1U, g_2U, \ldots, g_kU$ bezeichnet. Also ist (wegen der Disjunktheits-Eigenschaft der Links-Nebenklassen) $|G| = |g_1U \cup g_2U \cup \ldots \cup g_kU| = |g_1U| + |g_2U| + \ldots + |g_kU|$. Da alle Links-Nebenklassen

[2] Joseph Louis Lagrange (1736–1813); italienisch-französischer Mathematiker

von U gleichmächtig sind, folgt daraus: $\left|G\right| = k \cdot \left|U\right|$. Da k als die Anzahl der Links-Nebenklassen von U (also als der Index von U in G) definiert war, folgt $\left|G\right| = \left|G:U\right| \cdot \left|U\right|$.

Folgerung und *Bemerkung* zur und Motivation der Bezeichnungsweise: $\left|G:U\right| = \dfrac{\left|G\right|}{\left|U\right|}$.

Erzeugende Elemente und zyklische Gruppen

Satz (Durchschnittsbildung und Untergruppen):

(i) Der Durchschnitt zweier Untergruppen einer Gruppe G ist eine Untergruppe von G.

(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen einer Gruppe G ist eine Untergruppe von G.

Beweis: Übung

Definitionen: Es sei G eine Gruppe und M eine *Teilmenge* von G. Es sei $D := \bigcap\limits_{M \subseteq U \leq G} U$ der Durchschnitt aller Untergruppen von G, welche die Menge M enthalten. Dann ist D ebenfalls eine Untergruppe von G; sie wird als die von der Menge M *erzeugte* Untergruppe bezeichnet.

Im Zeichen: $\langle M \rangle := \textit{die von } M \textit{ erzeugte Untergruppe von } G$.

Besteht die Menge M nur aus einem Element x, ist also $M = \{x\}$, so schreibt man auch kurz $\langle x \rangle$ an Stelle von $\langle \{x\} \rangle$ und bezeichnet $\langle x \rangle$ als die von dem Element x erzeugte Untergruppe.

Gruppen, die von einem Element x erzeugt werden können, heißen *zyklische* Gruppen.

Bemerkung: Es sei G eine zyklische Gruppe; etwa $G = \langle x \rangle$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von G, muss G alle Produkte der Form $x,\ x \circ x,\ x \circ x \circ x,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$
$x^{-1},\ x^{-1} \circ x^{-1},\ x^{-1} \circ x^{-1} \circ x^{-1},\ \ldots,\ x^{-k}, \ldots$ sowie das neutrale Element e enthalten.

Beispiele:

1. Die Menge der rationalen Zahlen (mit der gewöhnlichen Multiplikation) enthält die zyklische Gruppe $\langle 2 \rangle := \{2^x \,/\, x \in \mathbb{Z}\}$; m.a.W.: die (multiplikativ geschriebene) zyklische Gruppe $\langle 2 \rangle$ besteht aus den Elementen $2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots$ sowie $2^{-1},\ 2^{-2},\ \ldots,\ 2^{-k},\ \ldots$ und dem neutralen Element 1.
2. Die Menge der ganzen Zahlen (mit der gewöhnlichen Addition) enthält die zyklische Gruppe $\langle 6 \rangle$ der durch 6 teilbaren ganzen Zahlen; m.a.W.: die (additiv geschriebene) zyklische Gruppe $\langle 6 \rangle$ besteht aus den Elementen $6,\ 12,\ 18,\ \ldots,\ n \cdot 6,\ \ldots,$ sowie $-6,\ -12,\ -18,\ \ldots,\ -k \cdot 6,\ \ldots$ und dem neutralen Element 0.
3. Die zyklische Gruppe der ebenen Drehungen eines regelmäßigen 8-Ecks besteht aus den 8 folgenden Drehungen (etwa im Uhrzeigersinn):

δ_1 = Drehung um 45 Grad

δ_2 = Drehung um 90 Grad

δ_3 = Drehung um 135 Grad

...

δ_6 = Drehung um 270 Grad

δ_7 = Drehung um 315 Grad

δ_8 = Drehungum 360 Grad = δ_0 = Drehung um 0 Grad (dies ist das neutrale Element bzw. die identische Abbildung)

4. Die (additive) Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Restklassen modulo n ist eine zyklische Gruppe, die z.B. von dem Element (der Restklasse) $\bar{1}$ erzeugt wird.
Für $n = 6$ ist z.B.: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{1},\ \bar{1}+\bar{1},\ \bar{1}+\bar{1}+\bar{1},\ \bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1},\ \bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1},\ \bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}\}$
bzw. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4},\ \bar{5},\ \bar{6}\}$
Dabei ist $\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1} = \bar{6} = \bar{0}$.

Bemerkung: Es sei G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n; etwa $G = \langle x \rangle$. Dann gilt $G = \{x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$. Insbesondere gilt $x^n = e$ und $x^{-1} = x^{n-1}$.

Denn die Elemente $x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ müssen alle verschieden sein, da sonst die Elementezahl von G nicht erreicht würde. Eines dieser Elemente muss das neutrale Element e von G sein. Dies ist nur im Falle $x^n = e$ möglich (sonst wäre wieder die Ordnungs-Bedingung verletzt). Aus $x \circ x^{n-1} = x^n = e$ folgt schließlich $x^{n-1} = x^{-1}$.

Definition: Sei G eine Gruppe und $x \in G$. Als Ordnung des Elements x (im Zeichen: $ord(x)$) wird die kleinste positive natürliche Zahl n bezeichnet, für die die Gleichung $x^n = e$ gilt.
Mit anderen Worten: Die Ordnung des Elements x ist gleich der Ordnung der Untergruppe $\langle x \rangle$ von G.

Im Zeichen: $ord(x) = |\langle x \rangle|$

Aufgabe: G sei eine Gruppe, in der jedes Element höchstens die Ordnung 2 hat. Zeigen Sie: G ist kommutativ.

Bemerkung: Die wohl bekannteste Gruppe mit dieser Eigenschaft ist die *Kleinsche Vierergruppe*.

Aufgabe: Informieren Sie sich über die Kleinsche Vierergruppe.

Satz (Ordnung von Gruppenelementen):

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und x ein beliebiges Element von G.

(i) Die Ordnung des Elements x ein Teiler der Gruppenordnung: $ord(x) \mid n$.

(ii) $x^n = e$

Beweis:

(i) Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Lagrange.

(ii) Es sei k der Index der Untergruppe $\langle x \rangle$ in G und r die Ordnung von x.

Nach dem Satz von Lagrange gilt $|G| = |G : \langle x \rangle| \cdot ord(x)$ bzw. $n = k \cdot r$. Mit diesen Bezeichnungen gilt: $x^n = x^{k \cdot r} = x^{r \cdot k} = \left(x^r\right)^k = e^k = e$.

Satz: Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.
Beweis: Übung

Satz: Jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch.
Beweis: Übung

Gruppen primer Restklassen

Satz (Gruppe der primen Restklassen in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$)

Bezeichnungen und Basiswissen: siehe [Ziegenbalg 2002]

(i) Es sei $R_n := \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ die Menge der Restklassen modulo *n*. Die Menge $G_n \subseteq R_n$ sei wie folgt definiert: $G_n = \left\{\bar{x} \in R_n \,/\, GGT(x,n) = 1\right\}$. G_n enthält also genau die Restklassen, deren Repräsentant teilerfremd zu n ist. Dann bildet G_n mit der Restklassenmultiplikation eine Gruppe. Sie wird als die Gruppe der *primen Restklassen* modulo n bezeichnet.

(ii) Die Gruppe der *primen Restklassen* modulo n hat die Ordnung $\varphi(n)$, wo φ die Eulersche Funktion („Totientenfunktion“) ist.

(iii) Ist $n = p$ eine Primzahl, so hat die Gruppe der primen Restklassen modulo p die Ordnung $p-1$.

Beweis:

(i) *Zum neutralen Element*: Das neutrale Element $\bar{1}$ ist offensichtlich in G_n enthalten.

Zur multiplikativen Abgeschlossenheit: Es ist zu zeigen: Sind $\bar{a}$ und $\bar{b}$ Elemente von G_n, dann ist auch $\bar{a} \cdot \bar{b}$ ein Element von G_n. Dazu ist zu zeigen: Ist $GGT(a,n) = 1$ und $GGT(b,n) = 1$, dann ist auch $GGT(a \cdot b,\, n) = 1$. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung.

Zur Abgeschlossenheit bezüglich der Inversenbildung: Zu zeigen: Jedes Element $\bar{a} \in G_n$ besitzt ein Inverses. Sei also $GGT(a,n) = 1$. Dann gibt es nach dem Satz von der Vielfachsummendarstellung ganze Zahlen x und y mit der Eigenschaft $1 = x \cdot a + y \cdot n$. Man findet diese ganzen Zahlen x und y mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus (Berlekamp Algorithmus). Modulo n betrachtet (also in R_n) bedeutet dies $\overline{1} = \overline{x} \cdot \overline{a}$. Das mit dem Berlekamp Algorithmus zu findende Element $\overline{x}$ ist also das Inverse von $\overline{a}$.

(ii) und (iii): Dies sind nur direkte Umsetzungen der Definition der Eulerschen Totientenfunktion [Ziegenbalg 2002].

Die Sätze von Fermat und Euler

Satz (Fermat[3]): Es sei p ein Primzahl und a eine ganze Zahl, die nicht von p geteilt wird. Dann gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Satz (Euler[4]): Es sei n eine ganze Zahl und a eine zu n teilerfremde ganze Zahl. Dann gilt

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Beweis: Die beiden letzten Sätze folgen unmittelbar aus dem Satz von Lagrange (bzw. dem Satz über die Ordnung von Gruppenelementen), angewandt auf die Gruppe der primen Restklassen.

Literaturhinweise

Alexandroff P. S. : Einführung in die Gruppentheorie ; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Neunte Auflage Berlin 1975

Baumgartner L.: Gruppentheorie; Walter de Gruyter & Co., Sammlung Göschen, Berlin 1964

Baumslag G. and Chandler B.: Theory and Problems of Group Theory; Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968

Budden F. J.: The Fascination of Groups; Cambridge University Press 1972

Burnside W.: Theory of groups of finite order; Dover Publications, 1955 (2nd ed.)

Gorenstein D.: Finite Groups; Harper & Row Publishers, New York 1968

Grossmann J. und Magnus W.: Gruppen und ihre Graphen, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1971

Hall M.: The theory of groups; The Macmillan Company, New Yorck 1961 (2nd ed.)

Huppert B.: Endliche Gruppen I; Springer Verlag, Berlin 1967

Kochendörffer R.: Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966

Kurosh A. G.: The Theory of Groups; Chelsea Publishing Company, New York 1960

Ledermann: Introduction to Group Theory; Oliver & Boyd, Edinburgh 1973

Mitschka A.: Elemente der Gruppentheorie; Herder Verlag, Freiburg 1972

Siemon H.: Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zahlentheorie und Kombinatorik; Klett Studienbücher, Stuttgart 1981

Wielandt H.: Finite permutation groups; Academic Press, New York 1964

Ziegenbalg J.: Elementare Zahlentheorie – Beispiele, Geschichte, Algorithmen; Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main 2002

[3] Pierre de Fermat (1601-1665), französischer Mathematiker
[4] Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker