

Jochen Ziegenbalg
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Karlsruhe

email: ziegenbalg@ph-karlsruhe.de

homepage: <http://www.ph-karlsruhe.de>

3.2 Zahlenfolgen und vollständige Induktion

Definitions- und Darstellungsformen von Zahlenfolgen, Berechnungsweisen, Grundsätzliches (das Prinzip der vollständigen Induktion) und Anwendungen

Inhalt

- 3.2.1 Zahlenfolgen
- 3.2.2 Die Fibonacci-Zahlen
- 3.2.3 Vollständige Induktion
- 3.2.4 Der goldene Schnitt
- 3.2.5 Phyllotaxis
- 3.2.6 Aufgaben zu Abschnitt 3.2

3.2 Zahlenfolgen und vollständige Induktion

Jochen Ziegenbalg und Erich Ch. Wittmann

Klarheit ist ein Wert an sich.

Karl Popper, Vermutungen und Widerlegungen, 1935

*In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Bildung mehr,
als in einer übertrieben genauen Rechnung.*

Carl Friedrich Gauß, Mathematiker, Physiker & Astronom, 1777-1855

In Abschnitt 1.2 haben wir das „Hochhangeln von einer Zahl zur nächsten“ auf zwei Ebenen betrachtet: Einerseits bei der rekursiven Berechnung von Zahlenfolgen, andererseits bei induktiven Beweisen von Formeln. Diese beiden Ebenen, zwischen denen enge Beziehungen bestehen, werden im vorliegenden Abschnitt genauer betrachtet. Im Mittelpunkt wird dabei das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* stehen, das sich im Kontext von Zahlenfolgen besonders gut erklären lässt.

3.2.1 Zahlenfolgen

Durch eine *Zahlenfolge* a_1, a_2, a_3, \dots wird jeder natürlichen Zahl n , dem *Index*, nach einer bestimmten Vorschrift eine Zahl a_n zugeordnet. Der Charakter der Zuordnung (Abbildung) kommt in der Schreibweise

$$n \rightarrow a_n$$

besonders deutlich zum Ausdruck.

Wie wir in Abschnitt 1.2 gesehen haben, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Zuordnung darzustellen:

- durch eine allgemeine (auch umgangssprachliche) Beschreibung
- durch ein geometrisches Muster
- durch eine rekursive Vorschrift (insbesondere durch eine Rekursionsgleichung)
- durch eine explizite Formel

Bei manchen Folgen bieten sich mehrere Möglichkeiten an.

Beispiele¹:

(1) Die Folge der Primzahlen:

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11, a_6 = 13, a_7 = 17, a_8 = 19, a_9 = 23 \dots$$

(2) Die Folge der Dreieckszahlen:

geometrisch:

¹ Die einer Folge zugrunde liegende Zuordnungsvorschrift drückt in der Regel eine *Gesetzmäßigkeit* aus, der die Folgenglieder unterliegen. Der allgemeine Folgenbegriff umfasst zwar auch Folgen ohne erkennbare Gesetzmäßigkeiten, wie z.B. Folgen von Zufallszahlen – derartige Folgen lassen wir hier aber ausser Acht.

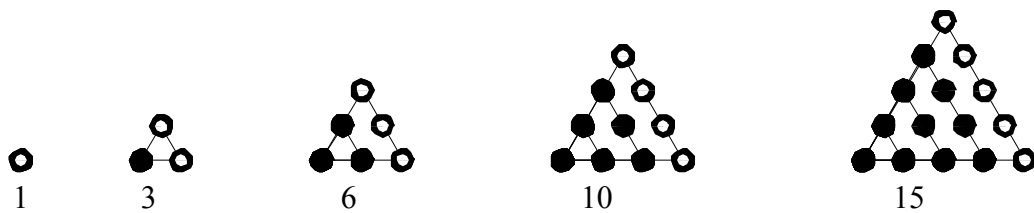


Abbildung 3.2.1.1

rekursiv: $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + n$ (für $n > 1$)

explizit: $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

- (3) Die Folge der Pentagonalzahlen

geometrisch:

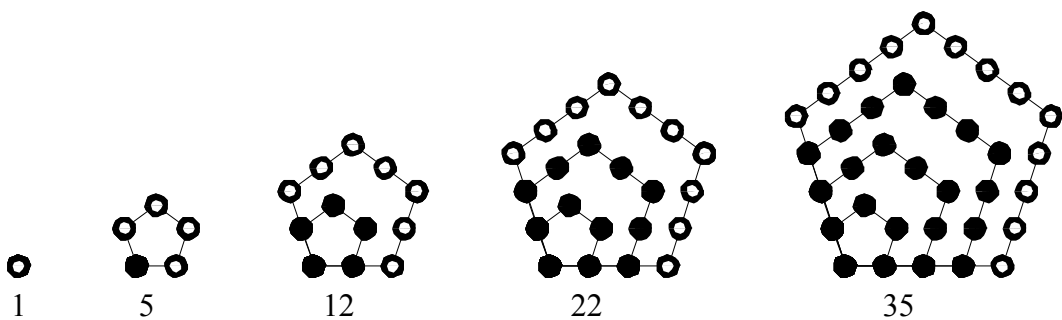


Abbildung 3.2.1.2

rekursiv: $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$ (für $n > 1$)

explizit: siehe 3.2.6 Aufgabe F17

- (4) Die Ziffernfolge der Dezimalbruchentwicklung von π :

$a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = 5, a_6 = 9, a_7 = 2, a_8 = 6, a_9 = 5 \dots$

- (5) Die Folge der Zweierpotenzen:

explizit: $a_n = 2^n$

rekursiv: $a_0 = 1$ und $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ (für $n > 0$)

- (6) Die Folge der Kehrwerte der Dreierpotenzen:

explizit: $a_n = \frac{1}{3^n}$

- (7) Die Folge der Fibonacci-Zahlen (siehe 1.2.3 (4)). Sie wird im nächsten Abschnitt ausführlich behandelt.

In vielen Anwendungssituationen resultiert die erste Phase der Mathematisierung zunächst in einer Beschreibung des Problems durch eine rekursive Folge. Aus unterschiedlichen Gründen ist man aber häufig auch an einer expliziten Beschreibung interessiert. Bei manchen rekursiv definierten Folgen gelingt es verhältnismäßig leicht, eine explizite Formel zu finden; so z.B. bei den Dreieckszahlen – siehe 1.2.3 bzw. 3.2.1, Beispiel 2. Dies ist aber nicht immer der Fall. Die Suche nach expliziten Darstellungen für komplizierte Folgen war in der Vergangenheit ein großes Betätigungsfeld für Mathematiker. Bei der Primzahlfolge waren bisher alle Versuche vergeblich und es nicht

anzunehmen, dass es überhaupt eine explizite Formeldarstellung gibt. Für die Fibonacci-Folge wurde eine explizite Formel, die sogenannte Binetsche Formel, gefunden. Sie wird im folgenden Abschnitt hergeleitet.

3.2.2 Die Folge der Fibonacci-Zahlen

Wir knüpfen direkt an die Darstellung in Abschnitt 1.2.3 an. Der Fibonacci-Folge liegt das einfache Bildungsgesetz zugrunde:

Jedes Glied der Folge ist die Summe seiner beiden Vorgänger.

Diese Regel ist natürlich erst ab dem dritten Folgenglied anwendbar; die ersten beiden Folgenglieder erhalten einfach die Anfangswerte „Eins“. Bezeichnen wir die n -te Fibonacci-Zahl mit F_n , so können wir die Definition der Fibonacci-Zahlen auch folgendermaßen fassen:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 1 & \text{für } n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für } n > 2 \end{cases} \quad (\text{FIB-1})$$

In der folgenden Tabelle sind die ersten 16 Fibonacci-Zahlen dargestellt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...

Abgesehen von den Werten für $n = 1$ und $n = 2$ wird bei der Berechnung von F_n auf die Werte von F_{n-1} und F_{n-2} zurückgegriffen („rekurriert“²). Man nennt (FIB-1) deshalb auch eine *rekursive* Beschreibung der Folge.

² *rekurrieren*: auf etwas Bezug nehmen, auf etwas zurückgreifen

An dieser Stelle ist eine Bemerkung zur konkreten *Be-*
rechnung der Folgenwerte angebracht. Nehmen wir
einmal an, wir wollten den Wert des sechsten Folgen-
glieds F_6 berechnen. Wir tun dies auf zweierlei Weise.

1. Durch „stures“ Nachvollziehen der rekursiven Defi-
nition (FIB-1), wie in der nebenstehenden Darstel-
lung.
2. Durch „iteratives Hochhangeln“:

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + F_3 = 3 + 2 = 5 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + F_4 = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Der Eindruck, dass die Auswertung nach der rekursiven
Beschreibung (1.) sehr viel aufwendiger ist als das itera-
tive Verfahren (2.) wird durch eine eingehende Analyse
bestätigt (vgl. J. Ziegenbalg: Algorithmen von
Hammurapi bis Gödel, Abschnitt 5.1).

Bei der Berechnung von F_{1000} mit Hilfe eines Com-
puteralgebra Systems wurde z.B. näherungsweise die
folgende Zeit-Relation beobachtet:

$$\frac{\text{rekursives Verfahren}}{\text{iteratives Verfahren}} \approx \frac{10^{294}}{1}$$

$$\begin{aligned} F_6 &= F_5 + F_4 \\ &= (F_4 + F_3) + F_4 \\ &= ((F_3 + F_2) + F_3) + F_4 \\ &= (((F_2 + F_1) + F_2) + F_3) + F_4 \\ &= (((1 + F_1) + F_2) + F_3) + F_4 \\ &= (((1 + 1) + F_2) + F_3) + F_4 \\ &= (((2 + F_2) + F_3) + F_4 \\ &= (((2 + 1) + F_3) + F_4 \\ &= (3 + F_3) + F_4 \\ &= (3 + (F_2 + F_1)) + F_4 \\ &= (3 + (1 + F_1)) + F_4 \\ &= (3 + (1 + 1)) + F_4 \\ &= (3 + 2) + F_4 \\ &= 5 + F_4 \\ &= 5 + (F_3 + F_2) \\ &= 5 + ((F_2 + F_1) + F_2) \\ &= 5 + ((1 + F_1) + F_2) \\ &= 5 + ((1 + 1) + F_2) \\ &= 5 + (2 + F_2) \\ &= 5 + (2 + 1) \\ &= 5 + 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Es dauerte recht lange, bis eine „Formel“ für F_n entdeckt wurde. Obgleich sie schon
A. de Moivre (1667–1754) und *L. Euler* (1707–1783) bekannt gewesen sein soll, wird sie heute als
Binetsche Formel bezeichnet (*J. P. M. Binet*, 1786–1856). Sie lautet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (\text{BINET})$$

Es ist durchaus angebracht, dieser Formel mit etwas Skepsis gegenüberzutreten, denn die
Fibonacci-Zahlen sind aufgrund ihrer Beschreibung natürliche Zahlen, während in der Formel
(BINET) Wurzelausdrücke (sogar im Nenner) vorkommen. Direktes Nachrechnen für kleine Werte
von n zeigt jedoch, dass die Formel korrekt zu sein scheint. (Prüfen Sie dies nach!)

Als nächstes stellt sich die Frage, wie man auf eine derartige Formel kommt. (Diese Frage ist
durchaus legitim, denn historisch gesehen, hat es ja auch mehrere Jahrhunderte gedauert, bis man
die Formel „hatte“.)

Wir knüpfen dazu an Abschnitt 1.2.3 an, wo die Frage untersucht wurde, ob es eine geometrische
Folge gibt, die gleichzeitig eine Fibonacci-Folge ist. Dort wurde gezeigt: Die geometrische Folge
 $a, a \cdot q, a \cdot q^2, \dots, a \cdot q^k, \dots$ (mit $a \neq 0$) ist genau dann eine Fibonacci-Folge, wenn der Para-

meter q die Gleichung $1 + q = q^2$ erfüllt. Diese quadratische Gleichung besitzt die beiden Lösungen

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Jede der geometrischen Folgen

$$a_n = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \tag{L1}$$

und

$$b_n = b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \tag{L2}$$

ist also (für beliebige Werte von a und b) eine Fibonacci-Folge und erfüllt somit die Rekursionsgleichung

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} . \tag{FIB-2}$$

Da a und b beliebige Zahlen (Faktoren) sind, läßt sich für jede der Folgen (L1) und (L2) der Anfangswert beliebig wählen. Wir werden versuchen, die Fibonacci-Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ bei geeigneter Wahl von a und b durch eine *lineare Kombination* der Folgen (L1) und (L2) zu gewinnen.

Wir bemerken zunächst, dass mit jeder der in (L1) und (L2) dargestellten Folgen auch ihre „Summe“

$$g_n = a_n + b_n \tag{FIB-3}$$

die Gleichung (FIB-2) erfüllt. Denn

$$\begin{aligned} g_n &= a_n + b_n \\ &= (a_{n-1} + a_{n-2}) + (b_{n-1} + b_{n-2}) \\ &= (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= g_{n-1} + g_{n-2} \end{aligned}$$

Wenn es also gelingt, die Koeffizienten a und b in (L1) und (L2) so zu bestimmen, dass $g_1 = g_2 = 1$ ist, dann stimmen die Folgenglieder g_n mit den Fibonacci-Zahlen F_n überein. Die Anpassung an die Anfangswerte führt zu den Gleichungen:

$$g_1 = 1 = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0, \quad \text{also} \quad 1 = a + b \quad \text{bzw.} \quad b = 1 - a$$

$$g_2 = 1 = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1, \quad \text{also} \quad 1 = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Einsetzen von $b = 1 - a$ in die zweite Gleichung führt zu:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} \quad \text{und} \quad b = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}},$$

und das Einsetzen dieser Werte in (FIB-3) liefert die Binetsche Formel.

Bemerkungen zu Darstellungsform und Berechnung von Folgen

Wir haben somit zwei verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung der Folge der Fibonacci-Zahlen:

- Die ursprüngliche „natürliche“ Beschreibung:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 1 & \text{falls } n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

- Die Beschreibung durch die Binetsche Formel:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Die Darstellung durch (FIB-1) wird als *rekursive* Beschreibung der Fibonacci-Zahlen, die durch (BINET) gegebene als *explizite Darstellung* oder auch als *Darstellung in geschlossener Form* bezeichnet. Um die Bezeichnung „rekursiv“ zu verstehen, ist es hilfreich, die Folge in der üblichen Funktionsdarstellung zu schreiben, also als $F(n)$ an Stelle von F_n . In der Darstellung (FIB-1) greift man zur Beschreibung der Funktion F wiederum auf Werte der Funktion F zurück; man „rekurriert“ bei der Beschreibung von F auf F selbst. Rekursion ist also immer auch ein Beispiel für das Phänomen der *Selbstbezüglichkeit*, das in der letzten Zeit im Zusammenhang mit der „Chaos“-Theorie eine relativ große Popularität erlangt hat.

Aus wissenschaftstheoretischer Sicht gesehen ist die Rekursion (bzw. die Selbstbezüglichkeit) ein durchaus problembehaftetes Phänomen; es steht deutlich in der Nähe des sogenannten *circulus vitiosus* (des „Teufelskreises“). Zirkuläre Definitionen sind inhaltsleer; sie sind insbesondere in Philosophie und Metaphysik (wo man sie besonders gut verschleiern kann) geeignet, zu wenig ergiebigen Spekulationen Anlass zu geben. Gelegentlich findet man solche Formulierungen auch in literarischen Texten (ein bekanntes Beispiel ist etwa Gertrude Steins „Eine Rose ist eine Rose ist eine Rose“), aber dort gelten andere Maßstäbe. Es handelt sich jedenfalls nicht um einen Versuch, den Begriff der Rose zu definieren.

Kehren wir zurück zum Problem des „richtigen“ Definierens. Grundsätzlich unterliegen Definitionen dem folgenden Schema

$$\text{definiendum} = \text{definiens}$$

Dabei steht auf der linken Seite des Gleichheitszeichens (definiendum) der neue zu definierende Begriff; auf der rechten Seite (definiens) steht der Definitionstext. Es ist selbstverständlich, dass der Definitionstext aus bereits Bekanntem bestehen muss und den neu zu definierenden Begriff nicht (sei es direkt oder indirekt) enthalten darf, damit es nicht zum Teufelskreis des unendlichen Regresses kommt. So sagt ja auch der Text „Eine Rose ist eine Rose“ nichts über die Eigenschaften von Rosen aus.

Im Falle der Beschreibung der Fibonacci-Funktion F durch (FIB-1) scheint zunächst auch eine solche Zirkularität vorzuliegen; bei genauerem Hinsehen erkennt man jedoch, dass durch (FIB-1) nicht

die Funktion als Ganzes sondern dass nur der *Funktionswert* $F(n)$, also eine natürliche Zahl, beschrieben wird; dies jedoch anhand der „früheren“ Funktionswerte $F(n-1)$ und $F(n-2)$. Entscheidend ist, dass es dabei nicht zu einem unendlichen Regress kommt, weil der Prozess dieses „Herunterhangeln“ bei den nicht mehr rekursiv beschriebenen Anfangswerten $F(1)$ und $F(2)$ stoppt. Man erkennt die Wirksamkeit dieser Art von Definition am besten anhand eines konkreten Beispiels, etwa dem eingangs gegebenen Beispiel zur Berechnung von $F(6)$.

Die Einschätzung des Stellenwerts rekursiver und expliziter Beschreibungen wirft auch ein interessantes Licht auf die philosophischen und wissenschaftstheoretischen Grunddispositionen der Mathematik in den verschiedenen Zeitepochen.

Einer jahrhundertealten Tradition entsprechend hat man die in (FIB-1) gegebene rekursive Darstellung nicht „für voll“ genommen. Die Beschreibung einer Folge wurde erst dann als befriedigend angesehen, wenn man sie in expliziter, geschlossener Form vorliegen hatte. Die Gründe für diese Einstellung sind historisch zu erklären: in der geschlossenen Form werden die Werte dieser Folge (und anderer rekursiv gegebener Folgen) durch elementare Funktionen (Potenzfunktionen, Polynome, Exponentialfunktionen, logarithmische und trigonometrische Funktionen, ...) beschrieben, die man im Laufe der Jahrhunderte immer besser kennen und beherrschen gelernt hatte. So kannte man z.B. die Struktur dieser Funktionen (ihre Symmetrien, ihre Periodizitäten, ihr Wachstums- und ihr asymptotisches Verhalten, ihr Krümmungsverhalten, ...) gut und bewegte sich auf festem Boden, wenn man etwas anhand dieser Funktionen beschreiben konnte. Die mathematische Gemeinschaft als Ganzes entwickelte eine Art Intuition für das Verhalten dieser Funktionen und den Umgang mit ihnen.

All die obengenannten Gründe für die Wertschätzung expliziter Darstellungen gelten grundsätzlich auch heute noch. Ein Mathematiker, der auch nur einen Blick auf die Binetsche Formel wirft, wird sofort erkennen, dass das Wachstum der Folge von exponentieller Natur ist, dass die Werte der Folge also mit wachsendem Argument extrem schnell ansteigen. Der rekursiven Form sieht man das i.a. nicht so direkt an. Es stellt sich jedoch die Frage, ob dies nicht auch eine Folge der Gewohnheit ist und ob man bei intensiverer Verwendung der rekursiven Form nicht auch eine solche Intuition entwickeln würde.

Früher kam noch ein weiterer Aspekt hinzu: Im Laufe der Jahrhunderte wurden umfangreiche Tafelwerke für die obengenannten elementaren Funktionen erstellt, mit denen sich die entsprechenden Folgen- und Funktionswerte, zumindest näherungsweise, vergleichsweise bequem ermitteln ließen, wenn man erst einmal eine explizite Darstellung hatte. Auch dies war sicher ein Grund für die hohe Wertschätzung expliziter Darstellungen. Dieser *Auswertungsaspekt* stellt sich heute im Zusammenhang mit dem Einsatz von Computern und entsprechender Software jedoch völlig anders dar. Es wäre heute unsinnig, etwa die Binetsche Formel zur Berechnung konkreter Werte der Fibonacci-Folge heranzuziehen. Wozu auch immer die Binetsche Formel gut sein mag – für eines taugt sie sicher nicht: zum Ausrechnen der Fibonacci-Zahlen mit Hilfe eines Computers.

Denn zur Auswertung der Binetschen Formel wird (wegen der darin enthaltenen Exponentialfunktion) ein im Prinzip beliebig lang laufendes Näherungsverfahren in Gang gesetzt, während der Prozess des iterativen Hochhangeln nach einer von Anfang an festliegenden Zahl von endlich vielen Iterationsschritten beendet ist .

Darüber hinaus hat man es beim iterativen Hochhangeln nur mit natürlichen Zahlen und ihrer Arithmetik zu tun, während bei der Verwendung der Binetschen Formel extrem komplizierte Wurzelausdrücke entstehen, die für das numerische Rechnen zwei gravierende Nachteile mit sich bringen: Falls man die Binetsche Formel, etwa mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners, nur numerisch auswertet, so entstehen bei der numerischen Umsetzung von irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{5}$)

Ungenauigkeiten, die sich bei der Auswertung der Binetschen Formel in unangenehmer Weise fortpflanzen können. Für viele Fragestellungen, so z.B. in der Zahlentheorie, benötigt man aber die exakten Werte. Weiterhin ist das Rechnen mit Bruchzahlen oder gar irrationalen Zahlen auch vom Zeitbedarf her sehr viel aufwendiger als das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Solche Zahlen werden in vielen Softwaresystemen als „Gleitkommazahlen“ umgesetzt, die neben den damit verbundenen Genauigkeitsverlusten auch erheblich längere Rechenzeiten mit sich bringen.

In der Sprechweise der Informatik drückt man dies so aus: Die Ermittlung von Fibonacci-Zahlen auf der Basis der in (FIB-1) gegebenen Beschreibung ist verbunden mit der Methode des iterativen „Hochhangelns“ wesentlich *effizienter* als die Ermittlung mit Hilfe der Binetschen Formel.

Und wenn man schon von Effizienz spricht, dann ist besonders im Bildungszusammenhang neben den (maschinenorientierten) Formen der Laufzeit- und der Speicher-Effizienz schließlich auch nicht die (menschenbezogene) *kognitive Effizienz* zu vergessen, die sich etwa in den folgenden Fragen niederschlägt: Wie natürlich spiegelt sich das ursprünglich gegebene Problem in der Beschreibung des Lösungsverfahrens wider? Ist die Darstellung der Lösung dem Problem angemessen; ist sie verständlich (gedanklich klar oder eher obskur); ist sie mit elementaren (insbesondere schulischen) Mitteln zu erarbeiten; lässt sie die Benutzung von vorher erarbeiteten Werkzeugen zu?

Auch in Bezug auf die kognitive Effizienz weisen Darstellungen in geschlossener Form im allgemeinen erhebliche Nachteile auf. So ist die Problematik der Fibonacci-Zahlen und insbesondere ihr durch (FIB-1) gegebenes Bildungsgesetz auf der Basis der Grundschulmathematik formulierbar. Grundschüler können z.B. durch die Technik des „Hochhangelns“ von Anfangswerten aus Tabellen mit Fibonacci-Zahlen erstellen (man vergleiche dazu das Transkript in Abschnitt 1.2.3). Zur Formel von Binet haben sie (und nicht nur sie) jedoch keinen Zugang. Bestünde die einzige Möglichkeit zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen in der Auswertung der Formel von Binet, so wäre dieses Gebiet für die meisten Menschen praktisch nicht zugänglich.

3.2.3 Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Von der rekursiven Darstellung von Folgen führt ein natürlicher Weg zu „induktiven“ Beweisen. Wir erläutern dies zunächst anhand eines Beispiels.

Beim Spielen mit Zahlen begegnen wir gelegentlich bemerkenswerten Mustern. So etwa auch im folgenden Fall. Die fortlaufende Addition der Kuben natürlicher Zahlen führt zu einer erstaunlichen Beobachtung: man erhält stets Quadratzahlen!

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 &= 9 = 3^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 = 6^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 = 10^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 225 = 15^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= 441 = 21^2
 \end{aligned}$$

Damit nicht genug; die jeweilige Quadratzahl ist auch noch von einer ganz speziellen Form:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 &= 3^2 = (1+2)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= 6^2 = (1+2+3)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 10^2 = (1+2+3+4)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 15^2 = (1+2+3+4+5)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= 21^2 = (1+2+3+4+5+6)^2
\end{aligned}$$

Ob es wohl so weitergeht? Es sieht so aus:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 &= 784 = (1+2+3+4+5+6+7)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 &= 1296 = (1+2+3+4+5+6+7+8)^2
\end{aligned}$$

Selbst im Sonderfall mit nur einem Summanden gilt diese Gesetzmäßigkeit, denn

$$1^3 = 1^2.$$

Wenn wir jedoch beweisen wollen, dass ganz allgemein die Gleichung

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2 \quad (*)$$

gilt, reicht die jeweils spezielle Überprüfung endlich vieler Beispiele unter Abstützung auf die jeweils vorhergehende Rechnung nicht aus. Die Situation ändert sich aber grundlegend, wenn es gelingt, ein *formales* Schema anzugeben, das allgemein anwendbar ist und diese Abstützung daher immer leistet. Wenn ein solches formales Schema gefunden ist, ist das Hochhangeln von Zahl zu Zahl unbegrenzt möglich, denn die jeweils hergeleitete Beziehung kann jedes Mal sofort zum Ausgangspunkt des nächsten Schrittes gemacht werden. Im obigen Beispiel wird dann die Gültigkeit der Formel für $n=8$ zur Grundlage für die Gültigkeit der Formel für $n=9$; dies wiederum wird zur Gültigkeit der Formel für $n=10$ usw. – immer nach demselben Schema.

Dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion liegt nun die folgende Idee zugrunde: Wenn wir zeigen können, dass aus der Gültigkeit der Gleichung für eine beliebige Zahl k stets die Gültigkeit für die nachfolgende Zahl $k+1$ folgt, so muss die Behauptung (*) ganz allgemein gelten.

Konkret ist also zu zeigen: Aus der Gültigkeit der Gleichung

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1+2+\dots+k)^2$$

folgt stets die Gültigkeit der Gleichung

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = (1+2+\dots+(k+1))^2.$$

Dies sei nun nachgeholt: Sei also k eine Zahl, für welche die Formel

$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1+2+\dots+k)^2$ gelte. Dann ist (unter Ausnutzung der Formel für die Dreieckszahlen)

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= (1+2+\dots+k)^2 + (k+1)^3 \\
&= \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k^2 + 4k + 4) \cdot (k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k+2)^2 \cdot (k+1)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}\right)^2 \\
&= (1+2+\dots+(k+1))^2
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt ist geglückt; die Formel gilt somit also auch für $k+1$.

Um das hier am Beispiel formulierte Beweisprinzip der vollständigen Induktion noch genauer erläutern zu können, führen wir die folgende Abkürzung ein: Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Aussage:

$$\text{Für die natürliche Zahl } n \text{ gilt: } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2.$$

Wir haben oben durch direkte Rechnung gesehen, dass die Aussagen $A(1), \dots, A(8)$ richtig sind und wir haben ein formales Schema angegeben, das $A(9)$ auf $A(8)$, $A(10)$ auf $A(9)$, usw. abstützt. Damit ist klar, dass die Schlusskette niemals abbricht und die Formel allgemein gültig ist.

Wir betrachten ein weiteres *Beispiel*: Mit $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$ sei wieder die Folge der Fibonacci-Zahlen bezeichnet. Dann gilt für jede natürliche Zahl n :

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad (\text{FIB-4})$$

Erster Beweis (mit vollständiger Induktion):

Für erste Werte von n rechnet man dies (anhand der Definition der Fibonacci-Zahlen) leicht nach:

$$n=1: \quad F_1^2 = 1; \quad F_1 \cdot F_2 = 1; \quad \text{also: } F_1^2 = F_1 \cdot F_2$$

$$n=2: \quad F_1^2 + F_2^2 = 1+1=2; \quad F_2 \cdot F_3 = 1 \cdot 2 = 2; \quad \text{also: } F_1^2 + F_2^2 = F_2 \cdot F_3$$

$$n=3: \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1+1+4=6; \quad F_3 \cdot F_4 = 2 \cdot 3 = 6; \quad \text{also: } F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_3 \cdot F_4$$

$$n=4: \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1+1+4+9=15; \quad F_4 \cdot F_5 = 3 \cdot 5 = 15;$$

$$\text{also: } F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = F_4 \cdot F_5$$

Sei nun k eine beliebige natürliche Zahl, für welche die Gleichung

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1} \quad (*)$$

schon nachgewiesen ist.

Wir wollen zeigen, dass dann für den Nachfolger $k + 1$ stets folgt

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2} \quad (**)$$

In der folgenden Rechnung können wir die Induktionsannahme (*) ausnutzen:

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_{k+1}^2 &= (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2) + F_{k+1}^2 = F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} \cdot (F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} \cdot F_{k+2} \end{aligned}$$

Damit ist die Gültigkeit der Gleichung (**) nachgewiesen.

Rückblickend ist ersichtlich, dass es genügt, die Formel nur für $n = 1$ nachzurechnen. Von da an greift das allgemeine Schema.

Zweiter Beweis: Rechtecke aus Fibonacci-Zahlen

Die vollständige Induktion ist zwar ein mächtiges Werkzeug zum Beweisen mathematischer Aussagen. Manchmal kommt man aber auch mit anderen Mitteln ans Ziel. Dies sei anhand des letzten Beispiels gezeigt.

Setzt man nämlich die Quadrate der Fibonacci-Zahlen wie im folgenden Bild schrittweise zu Rechtecken aneinander, so erhält man daraus unmittelbar die Formel (FIB-4). Denn die linke Seite der Formel beschreibt die Flächensumme der Einzelquadrate und die rechte Seite beschreibt die offensichtlich gleichgroße Fläche des (zerlegungsgleichen) Gesamtrechtecks.

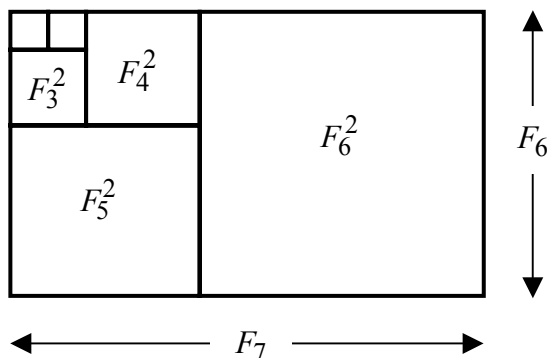


Abbildung 3.2.3.1

Ein Beckmesser könnte einwenden, dies sei kein "richtiger" Beweis, denn die Gültigkeit der Aussage sei ja nur am Beispiel $n = 6$ nachgewiesen worden. Formal gesehen stimmt dies zwar, aber dies ist noch nicht die ganze Wahrheit. Eine genaue Betrachtung der obigen Abbildung zeigt, dass ihr Konstruktionsprinzip (und somit auch die Formel) sofort auf weitere Werte von n übertragbar ist. Die Argumentation an dem speziellen Beispiel ist also sofort auf beliebige andere Werte von n anwendbar und daher allgemeingültig. Man nennt derartige Begründungen *paradigmatisch*. In der Elementargeometrie (so z.B. in der Dreieckslehre) ist die paradigmatische Vorgehensweise so selbstverständlich, dass sie gar nicht mehr auffällt. Zum Beweis einer konkreten Aussage über beliebige Dreiecke zeichnet man in der Regel ein konkretes Dreieck und führt an diesem Beispiel Überlegungen durch, die für alle Dreiecke gelten. Da paradigmatische Begründungen meist in engem Zusammenhang mit (paradigmatischen) geometrischen Veranschaulichungen stehen, sind sie nicht nur für den Beweis selbst sondern besonders auch für die heuristische Phase der "Satz-Findung" von großer Bedeutung. Denn wie hätte man denn z.B. auf die Gleichung (FIB-4) stoßen können, wenn nicht über eine Veranschaulichung wie in der obigen Abbildung? Dass man bei der Nutzung von Veranschaulichungen jedoch durchaus vorsichtig sein muss, zeigt das in 3.2.6, Aufgabe F14 behandelte „Flächenzerlegungs-Paradoxon“.

Der abstrakte Kern dieser beiden Beispiele ist das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion*, dessen logische Struktur nun etwas genauer untersucht werden soll.

Ein mathematischer Beweis ist eine Argumentationskette, durch welche die zu beweisende Aussage (der zu beweisende Satz) in mehr oder weniger formalisierter Form als richtig (bzw. gültig) nachgewiesen werden soll. In Abhängigkeit von der zu beweisenden Aussage kann die jeweilige Beweistechnik, die in irgendeiner Form immer auf der mathematischen Logik beruht, sehr unterschiedlich ausfallen. In jeder zu beweisenden Aussage treten mathematische Objekte auf (Zahlen, Geraden, Ebenen, Winkel, ...). Es ist selbstverständlich, dass ein Beweis in der Regel dem Aspekt Rechnung tragen muss, wie die betreffenden Objekte konstruiert oder definiert wurden.

Eine der wichtigsten Strukturen der Mathematik ist die Menge der **natürlichen Zahlen**. Sie lässt sich konstruktiv beschreiben durch die Axiome von *G. Peano* (1858–1939), die in der Formulierung von *E. Landau* (1877–1938), aus dem Jahre 1929, folgendermaßen lauten:

Axiom 1: *1 ist eine natürliche Zahl.*

(Die Menge der natürlichen Zahlen ist also insbesondere nicht leer. Sie enthält ein Ding, das 1 heißt.)

Axiom 2: *Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es genau eine natürliche Zahl, die der Nachfolger von x heißt und mit x' bezeichnet werden möge.*

Axiom 3: *Stets ist $x' \neq 1$.*

(Es gibt also keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 1 ist.)

Axiom 4: *Aus $x' = y'$ folgt $x = y$.*

(Mit anderen Worten: unterschiedliche natürliche Zahlen haben unterschiedliche Nachfolger.)

Axiom 5 (Induktionsaxiom): *Es sei M eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften:*

(I) *1 gehört zu M .*

(II) *Wenn x zu M gehört, so gehört x' zu M .*

Dann umfaßt M alle natürlichen Zahlen.

Eine besondere Rolle in der Definition der natürlichen Zahlen spielt Axiom 5, das *Induktionsaxiom*. Auf ihm beruht die Beweistechnik der *vollständigen Induktion* (im Kontrast zu der aus den empirischen Wissenschaften bekannten sogenannten „unvollständigen“ Induktion). Praktisch jeder Beweis über natürliche Zahlen beruht direkt oder indirekt auf dem Prinzip der vollständigen Induktion. Jeder Beweis, der auf dem Induktionsaxiom aufbaut, muss strukturell aus den folgenden Teilen bestehen.

Situationsbeschreibung (Kontext): Eine Aussage $A = A(n)$ über natürliche Zahlen ist zu beweisen. Wenn M als die Menge derjenigen natürlichen Zahlen definiert wird, welche die Aussage A erfüllen, muss nachgewiesen werden, dass M alle natürlichen Zahlen umfaßt.

Dies geschieht in der folgenden Form:

1. Es wird gezeigt, dass die Zahl 1 zu M gehört. Dieser Schritt wird im folgenden als *Induktionsverankerung* bezeichnet.
2. Es wird gezeigt: Wenn eine natürliche Zahl k zu M gehört, so gehört auch stets deren Nachfolger k' zu M . Dieser Schritt wird im folgenden als *Induktionsschritt* bezeichnet. Im Induktionsschritt ist zu zeigen, dass aus der *Induktionsannahme* „ k gehört zu M “ stets der *Induktionsschluss* „der Nachfolger k' von k gehört ebenfalls zu M “ folgt.

(Bei der später einzuführenden Addition natürlicher Zahlen wird $k+1$ als der Nachfolger k ' von k definiert. Deshalb spricht man bei der vollständigen Induktion auch vom „Schluss von k auf $k+1$ “.)

Beispiel: Zu beweisen ist: Für jede natürliche Zahl n gilt die Formel

$$2^n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + 1.$$

Induktionsverankerung: Die Aussage gilt für $n=1$, denn $2^1 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + 1$.

Der *Induktionsschritt* besteht aus der

Induktionsannahme: Sei k eine beliebige natürliche Zahl mit der Eigenschaft

$$2^k = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) + 1 \quad (*)$$

und dem

Induktionsschluss: Dann kann auch die Gültigkeit der Formel

$$2^{k+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k) + 1 \quad (**)$$

gezeigt werden.

Dieser *Induktionsschluss* ist im betrachteten Beispiel leicht durchzuführen:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot ((2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) + 1) \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^k + 2 \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^k) + 1 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Induktionsverankerung erfolgt in Induktionsbeweisen meist bei der natürlichen Zahl 1; gelegentlich aber auch bei der Zahl 0. Sie kann aber im Prinzip bei jeder natürlichen (oder ganzen) Zahl b beginnen. Die Aussage gilt dann eben für alle natürlichen (bzw. ganzen) Zahlen größer oder gleich b . Auch dazu ein

Beispiel: Durch konkretes Nachrechnen kommt man zu der Vermutung, dass die Gleichung $2^n > n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n > 5$ gilt. Wir führen zum Nachweis einen Induktionsbeweis durch, dessen *Verankerung* bei $n=5$ stattfindet: $2^5 > 5^2$.

Induktionsannahme: Sei k ($k > 5$) eine natürliche Zahl, für die $2^k > k^2$ gilt.

Induktionsschluss: Für $k > 5$ ist $k^2 > 2 \cdot k + 1$ und somit gilt

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2 \cdot k^2 \\ &= k^2 + k^2 \\ &> k^2 + 2 \cdot k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Beispiel: Behauptung: Für jede natürliche Zahl n und für jede ganze Zahl x gilt:

$$1-x \text{ ist ein Teiler von } 1-x^n.$$

Induktionsverankerung: Für $n=1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Es sei k eine beliebige natürliche Zahl, für die gilt:

$$1-x \text{ ist ein Teiler von } 1-x^k.$$

Induktionsschluss: Es ist $1-x^{k+1} = (1-x^k) + (x^k - x^{k+1}) = (1-x^k) + x^k \cdot (1-x)$. Der erste Summand auf der rechten Seite wird nach Induktionsannahme von $1-x$ geteilt; für den zweiten Summanden ist dies offensichtlich. Also wird die Summe von $1-x$ geteilt.

Bemerkung: Es gilt sogar die präzisere Aussage: $1-x^{k+1} = (1+x+x^2+\dots+x^k) \cdot (1-x)$.

Beweise mit vollständiger Induktion kommen auch in Situationen vor, die nicht so offensichtlich mit den natürlichen Zahlen zusammenhängen.

Beispiel: Behauptung: Eine Landkarte, deren Ländergrenzen aus (endlich vielen) Geraden besteht, die von Rand zu Rand verlaufen, läßt sich mit zwei Farben so färben, dass benachbarte Länder stets verschieden gefärbt sind.

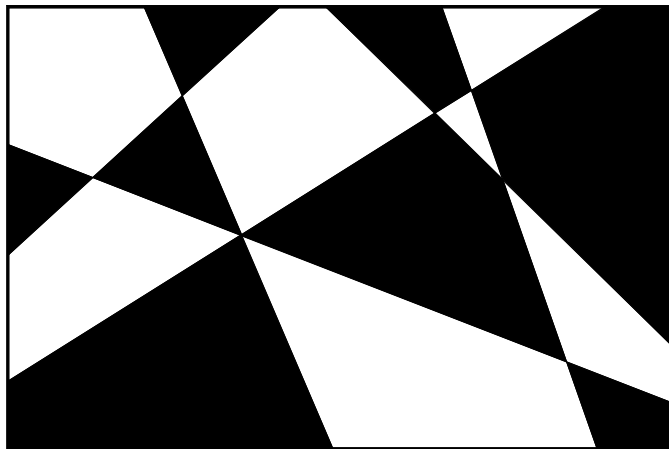


Abbildung 3.2.3.2

Induktionsverankerung: Für Landkarten mit nur einer Grenzgeraden ist die Aussage offensichtlich wahr.

Induktionsschritt (skizziert):

Induktionsannahme: Die Aussage gelte für Landkarten mit k Grenzgeraden.

Induktionsschluss: Wir betrachten nun eine Landkarte mit $k+1$ Grenzgeraden, greifen eine der Grenzgeraden heraus und entfernen sie aus der Landkarte. Die so entstandene neue Landkarte hat nur k Grenzgeraden und kann deshalb mit zwei Farben gefärbt werden. Nun fügen wir die entfernte Gerade wieder hinzu. Sie teilt die Landkarte in zwei Teilflächen auf. Wir wählen eine dieser Teilflächen aus, „polen“ ihre Färbung um (was weiß war wird schwarz und was schwarz war wird weiß) und erhalten so eine zulässige Schwarz-Weiß-Färbung der Landkarte mit $k+1$ Grenzgeraden.

Im folgenden betrachten wir drei Beispiele, bei denen das Schema der vollständigen Induktion aus unterschiedlichen Gründen nicht greift. Dadurch wird im Kontrast verdeutlicht, worauf es bei einem Beweis durch vollständige Induktion ankommt.

Erstes Beispiel: Wie jedes Beweisprinzip, so ist auch das Prinzip der vollständigen Induktion nicht frei von der Gefahr, in Scheinbeweisen verwendet zu werden.

„Satz“: Alle Knöpfe haben dieselbe Farbe.

Beweis: Wir betrachten n -elementige Mengen von Knöpfen und zeigen, dass alle Knöpfe in einer beliebigen solchen n -elementigen Menge dieselbe Farbe haben.

Induktionsverankerung: In jeder ein-elementigen Menge haben alle Knöpfe trivialerweise dieselbe Farbe.

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Es sei k eine beliebige natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass in jeder k -elementigen Menge von Knöpfen alle Knöpfe dieselbe Farbe haben.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass die entsprechende Aussage dann auch für jede $(k + 1)$ -elementige Menge gilt. Sei also eine beliebige $(k + 1)$ -elementige Menge von Knöpfen gegeben. Wir stellen uns die Knöpfe entlang einer Geraden angeordnet vor.

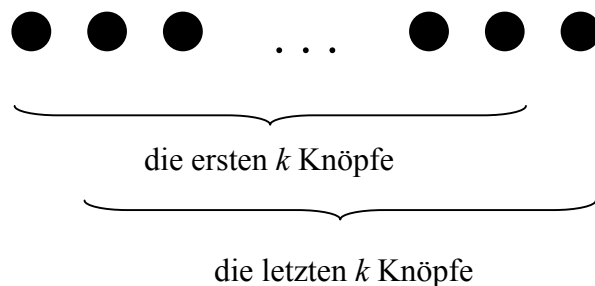


Abbildung 3.2.3.3

Wie in der Abbildung angedeutet, fassen wir die ersten k Knöpfe und die letzten k Knöpfe zusammen. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten k Knöpfe dieselbe Farbe; entsprechendes gilt für die letzten k Knöpfe. Der zweite Knopf gehört zu beiden Mengen. Also haben alle Knöpfe in der ersten Menge dieselbe Farbe wie der zweite Knopf – und ebenso alle Knöpfe in der zweiten Menge – und somit haben alle Knöpfe in der $(k + 1)$ -elementigen Menge dieselbe Farbe.

Wo steckt der Fehler im „Knopf“-Beweis?

Dass es für einen Beweis durch vollständige Induktion nicht genügt, die ersten Schritte jeweils einzeln nachzuprüfen, zeigt das *zweite Beispiel*, das auf Leonhard Euler (1707–1783) zurückgeht.

Der Ausdruck $p(n) = n^2 - n + 41$ liefert für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ die Zahlen 41, 43, 47, 53, ..., die, wie man nachprüft, bis zu $n = 40$ Primzahlen sind. Für $n = 41$ erhält man jedoch $p(41) = 1681 = 41 \cdot 41$, also keine Primzahl mehr. (Und $p(42) = 1763 = 41 \cdot 43$ ist weder Primzahl noch Quadratzahl). Im Gegensatz zu einem Beweis durch vollständige Induktion gibt es hier kein allgemeines formales Schema, um den Primzahlnachweis von $p(n + 1)$ auf den Nachweis von $p(n)$ zu stützen. Die Nachweise verlaufen völlig getrennt und haben keinerlei allgemeine Beweiskraft.

Lehrreich als Kontrast zur vollständigen Induktion ist auch noch ein *drittes Beispiel*. Durch Probieren findet man heraus, dass sich, von 1 beginnend, eine Zahl nach der anderen als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellen lässt:

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\2 &= 1 + 1 \\3 &= 3 \\4 &= 3 + 1 \\5 &= 3 + 1 + 1 \\6 &= 6 \\7 &= 6 + 1 \\8 &= 6 + 1 + 1 \\9 &= 6 + 3 \\10 &= 10 \\11 &= 10 + 1 \\12 &= 6 + 6 \\13 &= 10 + 3 \\&\dots\end{aligned}$$

Diese Kette lässt sich beliebig weit fortsetzen. Bei manchen Zahlen (z.B. 7, 8 oder 23) kann man sich dabei auf Darstellungen vorhergehender Zahlen mit einem oder zwei Summanden stützen (z.B. $6 = 6$, $7 = 6 + 1$, $20 = 10 + 10$) und zu diesen einfach eine Dreieckszahl hinzufügen ($7 = 6 + 1$, $8 = 7 + 1 + 1$, $23 = 10 + 10 + 3$). Dies geht aber nicht immer, so dass kein allgemeines formales Induktionsschema vorliegt, auf das man die Allgemeingültigkeit der Darstellungen stützen könnte. Anders als bei dem vorhergehenden Beispiel bricht die Kette der unvollständigen Induktion in diesem Fall aber nicht ab: C. F. Gauß (1777–1855) hat in seinen "Disquisitiones arithmeticae" 1799 auf nicht elementarem Wege ohne vollständige Induktion bewiesen, dass jede natürliche Zahl als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellbar ist.

Historische Bemerkung: Obwohl das Prinzip der vollständigen Induktion in voll entwickelter Form erst im Laufe des vorigen Jahrhunderts formuliert wurde, geht die *Idee* der vollständigen Induktion im Sinne eines „Schritt für Schritt aufsteigenden Prozesses“ sehr viel weiter zurück.

So benutzte der Rabbiner Levi Ben Gershon, („Gersonides“, 1288–1344) diese Methode. Er beschrieb sie durch die Worte (ins Englische übertragen):

„... rising step by step ... to infinity“.

Ben Gershon behandelte die Induktion nicht abstrakt, sondern er setzte sie eher implizit zur Lösung konkreter Probleme ein; so z.B. zur Bestimmung der Anzahl der Permutationen einer bestimmten Anzahl von Elementen. Wir zitieren aus dem Artikel *Rabbi Levi Ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction* von N. L. Rabinovitch, Arch. Hist. Exact Sci., Vol 6, 237–248. In Proposition 63 formuliert Ben Gershon:

Proposition: *Wenn die Anzahl der Permutationen verschiedener Elemente gleich einer bestimmten Zahl ist, dann ist die Anzahl der Permutationen einer um ein Element größeren Menge gleich dem Produkt aus der vorherigen Anzahl von Permutationen und dem Nachfolger der (ursprünglich) gegebenen Elementezahl.*

Die Elemente seien a, b, c, d, e ; ihre Anzahl sei n und m sei der Nachfolger von n . Sei t die Anzahl der Permutationen von a, b, c, d, e . Wir fügen der Menge a, b, c, d, e ein Element hinzu und erhalten so die aus m Elementen bestehende Menge a, b, c, d, e, f . Wir behaupten, dass die Anzahl der Permutationen der Menge a, b, c, d, e, f gleich dem Produkt aus t und m ist.

Beweis: Wir stellen das neue Element f an die erste Stelle und fügen jede der Permutationen von a, b, c, d, e hinzu. Alle diese Anordnungen sind verschieden. Also ist die Anzahl der Permutationen mit dem Element f an der ersten Stelle gleich t . Da die Anzahl der Permutationen von a, b, c, d, e gleich t ist, gibt es (wenn wir e weglassen) ebenfalls t Permutationen von a, b, c, d, f . Wenn wir nun das Element e an der ersten Stelle vor alle diese Permutationen stellen, erhalten wir t verschiedene Permutationen mit dem Element e an der ersten Stelle. Entsprechend kann jedes der Elemente (der Ausgangsmenge) an die erste Stelle gestellt werden; wir erhalten dadurch jeweils t verschiedene Permutationen. Somit ist die Gesamtzahl der Permutationen (der Menge a, b, c, d, e, f) gleich t mal der Elementezahl m dieser Menge.

Die Formulierung von Ben Gershon ist (wie überhaupt die Mathematik in jener Zeit) stark durch das Fehlen einer effizienten mathematischen Notation beeinträchtigt. In heutiger Sprache könnte man den Sachverhalt etwa folgendermaßen ausdrücken:

Satz: Ist P_n die Anzahl der Permutationen einer n -elementigen Menge, dann gilt für die Anzahl der Permutationen einer $(n+1)$ -elementigen Menge: $P_{n+1} = (n+1) \cdot P_n$.

Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass vollständige Induktion und Rekursion zwei Seiten derselben Medaille sind.

3.2.4 Der goldene Schnitt

Wir kehren nochmals zu Abbildung 3.2.3.1 zurück, in der Rechtecke aus Quadraten über Fibonacci-Zahlen zusammengesetzt wurden. Die Seitenlängen dieser Rechtecke bestehen jeweils aus benachbarten Fibonacci-Zahlen. Die *Seitenverhältnisse* f_n der so entstehenden Rechtecke werden offenbar

durch die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen beschrieben, $f_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$:

1	1/2	2/3	3/5	5/8	8/13	13/21	21/34	34/55	55/89	89/144
144/233	233/377	377/610	610/987	987/1597	1597/2584	2584/4181				
4181/6765	6765/10946	10946/17711	17711/28657	28657/46368						
46368/75025										

Aus dem Bildungsgesetz der Fibonacci-Zahlen folgt für $n > 3$ sofort

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2 \cdot F_n, \quad \text{also } F_n > \frac{1}{2} F_{n+1} \quad \text{bzw. } \frac{F_n}{F_{n+1}} > \frac{1}{2}$$

und weiterhin

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > F_{n+1} + \frac{1}{2} F_{n+1} = \frac{3}{2} F_{n+1}; \quad \text{d.h. } \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} < \frac{2}{3}.$$

Für die Quotienten f_n (mit $n > 3$) gilt also stets $\frac{1}{2} < f_n < \frac{2}{3}$.

Ein Blick auf die entsprechenden dezimalen Näherungswerte

$f_1 = 1,0$	$f_2 = 0,5$	
$f_3 = 0,6666666666666667$	$f_4 = 0,6$	
$f_5 = 0,625$	$f_6 = 0,615384615384615$	
$f_7 = 0,619047619047619$	$f_8 = 0,617647058823529$	
$f_9 = 0,618181818181818$	$f_{10} = 0,617977528089888$	
$f_{11} = 0,6180555555555556$	$f_{12} = 0,618025751072961$	<i>Tabelle</i>
$f_{13} = 0,618037135278515$	$f_{14} = 0,618032786885246$	(FIB-5)
$f_{15} = 0,618034447821682$	$f_{16} = 0,618033813400125$	
$f_{17} = 0,618034055727554$	$f_{18} = 0,618033963166707$	
$f_{19} = 0,618033998521803$	$f_{20} = 0,618033985017358$	
$f_{21} = 0,618033990175597$	$f_{22} = 0,618033988205325$	
$f_{23} = 0,618033988957902$	$f_{24} = 0,618033988670443$	

bestätigt diese Beobachtung und gibt Anlass zu einer Reihe von Vermutungen:

1. Die Quotienten nehmen abwechselnd ab und zu.
2. Die aus dem ersten, dritten, fünften, siebenten, ... Wert bestehende Teilfolge ist monoton fallend.
3. Die aus dem zweiten, vierten, sechsten, achten, ... Wert bestehende Teilfolge ist monoton steigend.
4. Die Differenzen aufeinanderfolgender Quotienten streben gegen Null.

5. Die Folge der Quotienten strebt einem Grenzwert zu.

Zur Erhärtung dieser Vermutungen betrachten wir zunächst die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quotienten:

$$f_{n+1} - f_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} - \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}^2 - F_{n+2} \cdot F_n}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}}$$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann nachgewiesen werden (vgl. Abschnitt 3.2.6, Aufgabe F14 zum „Flächen-Paradoxon“):

$$F_{n+2} \cdot F_n = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}.$$

Daraus folgt für die obige Differenz

$$f_{n+1} - f_n = \frac{F_{n+1}^2 - F_{n+2} \cdot F_n}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}^2 - (F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1})}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}}. \quad (*)$$

Da die Fibonacci-Zahlen (streng monoton steigend) gegen Unendlich streben, strebt der Ausdruck $|f_{n+1} - f_n|$ (streng monoton fallend) gegen Null.

Für gerade Werte von n ist $\frac{(-1)^n}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}}$ positiv und somit $f_{n+1} > f_n$; für ungerade Werte von n ist $\frac{(-1)^n}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}}$ negativ und somit $f_{n+1} < f_n$ (vgl. Tabelle FIB-5).

Weiterhin folgt aus (*): $f_{n+2} - f_n = (f_{n+2} - f_{n+1}) + (f_{n+1} - f_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+3} \cdot F_{n+2}} + \frac{(-1)^n}{F_{n+2} \cdot F_{n+1}}$.

Da die Fibonacci-Zahlen monoton wachsen, ist der zweite Summand im letzten Ausdruck betragsmäßig größer als der erste Summand. Für gerade Werte von n ist der Ausdruck $f_{n+2} - f_n$ also positiv; für ungerades n ist er negativ.

Mit anderen Worten: Für gerade Werte von n ist $f_{n+2} > f_n$ und für ungerade Werte von n ist $f_{n+2} < f_n$.

Zusammen mit (*) erhalten wir also das Ergebnis:

Die Intervalle (f_2, f_1) , (f_4, f_3) , (f_6, f_5) , ... (f_{2k}, f_{2k-1}) , ... bilden eine *Intervallschachtelung*. Durch diese Intervallschachtelung wird eine reelle Zahl definiert, die wir φ nennen; φ ist also der Grenzwert der Folge $(f_n)_{n \rightarrow \infty}$; symbolisch ausgedrückt: $f_n \rightarrow \varphi$.

Für f_{n+1} gilt weiterhin $\frac{1}{f_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_n + F_{n+1}}{F_{n+1}} = f_n + 1$. Die Folgen $\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)_{n \rightarrow \infty}$ und $(f_n + 1)_{n \rightarrow \infty}$ streben somit demselben Grenzwert zu; der Grenzwert der letzteren Folge ist offenbar gleich $\varphi + 1$; der Grenzwert der Folge $\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)_{n \rightarrow \infty}$ ist andererseits gleich $\frac{1}{\varphi}$. Also muss für diesen Grenzwert die Gleichung $\frac{1}{\varphi} = \varphi + 1$ gelten. Er erfüllt also die quadratische Gleichung

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0.$$

Von den beiden Wurzeln $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ dieser Gleichung kommt nur die positive als Grenzwert der Folge der Fibonacci-Zahlen in Frage. Wir erhalten insgesamt das Ergebnis: Die Folge der Quotienten aus aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen strebt gegen den Grenzwert $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Der numerische Wert dieses Ausdrucks ist näherungsweise gleich 0,618.

Bemerkung: Die obige Gleichung $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ lässt sich auch in der folgenden (geometrisch interessanten) Form darstellen:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1-\varphi} \quad (\text{FIB-6})$$

Gleichung (FIB-6) besagt, dass φ die Einheits-Strecke 1 im Verhältnis des *goldenen Schnitts*³ teilt, d.h., dass sich die Gesamtstrecke zum größeren Teil so verhält, wie der größere Teil zum kleineren:

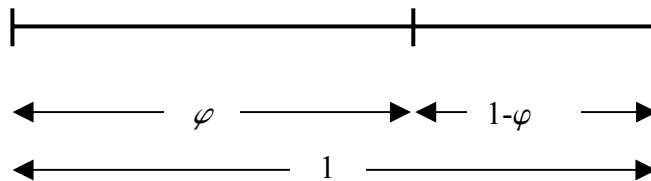


Abbildung 3.2.4.1

$$1 : \varphi = \varphi : (1 - \varphi).$$

Das Teilverhältnis des goldenen Schnitts ist eine der berühmtesten Zahlen in der Mathematik. Diese Zahl wurde und wird vielfach als Idealmaß für ästhetisch ausgewogene Verhältnisse angesehen. So kann man, wenn man will, den goldenen Schnitt in den Werken vieler großer Künstler entdecken. Einer der ersten dieser Künstler war der griechische Bildhauer $\Phi\text{Ι}\Delta\text{Ι}\text{Α}\Sigma$ (Phidias, 5. Jahrhundert v. Chr.). Ihm zu Ehren verwendet man, wie wir es auch getan haben, heute den (klein geschriebenen) Anfangsbuchstaben φ seines Namens als Symbol für den goldenen Schnitt.

Wir fassen die obigen Ergebnisse zusammen:

³ auch der Begriff *stetige Teilung* (englisch: *divine proportion*) wird verwendet

Satz: Die Quotienten $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ aufeinanderfolgender Fibonacci Zahlen streben gegen den Grenzwert

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{und liegen abwechselnd über und unter diesem Grenzwert.}$$

Der Grenzwert φ teilt die Einheitsstrecke im Verhältnis des goldenen Schnitts:

$$1 : \varphi = \varphi : (1 - \varphi).$$

Der numerische Wert von φ ist näherungsweise gleich 0,618.

3.2.5 Phyllotaxis

Mit dem Begriff *Phyllotaxis* bezeichnet man in der Biologie die Lehre von den Blattstellungen. Wenn man eine Sonnenblume, einen Kiefern- oder Tannenzapfen, eine Ananas, eine Spargelstange, eine Margerite, eine Dahlie und viele weitere Pflanzen aufmerksam betrachtet, kann man dabei überraschende Entdeckungen machen.

Betrachtet man etwa das Bild einer Sonnenblume, so wird man sehr bald entdecken, dass die Kerne spiralförmige Muster bilden. An weiteren Sonnenblumen und auch an ganz anderen Früchten, Blumen und sonstigen Gewächsen bestätigt sich dieser Sachverhalt. Dies allein ist noch nicht besonders aufregend, denn spiralförmige Muster kommen, bedingt durch die den Wachstumsprozessen zugrundeliegenden Gesetze, in der Natur oft vor; so z.B. auch bei vielen Muschel- und Schneckengehäusen.

Bei der Sonnenblume kann man rechtsdrehende und linksdrehende Spiralen entdecken (jeweils bei der Blickrichtung „von innen nach außen“). Wenn man die Spiralen zählt, so erkennt man dass es 55 rechtsdrehende und 34 linksdrehende Spiralen gibt. Diese Werte scheinen für die Sonnenblume recht stabil zu sein; auch an anderen Sonnenblumen kann man sie vorfinden.



Abbildung 3.2.5.1

Bei einer Ananas (Abbildung 3.2.5.2) entdeckt man (bei der Blickrichtung „von unten nach oben“) 5 langsam nach „links oben“ und 8 etwas steiler nach „rechts oben“ strebende strahlenförmige Muster; ein spiralförmiger Charakter ist hier nicht ganz so offensichtlich wie bei der Sonnenblume; er wird aber deutlicher, wenn man die Ananas von unten betrachtet.

Bei Kiefernzapfen (vgl. Abbildung 3.2.5.3) erkennt man 13 nach links drehende und 8 (etwas „flacher“) nach rechts drehende Spiralen.

Spätestens jetzt stellt sich beim mathematisch vorgebildeten Betrachter ein Verdacht ein: 5, 8, 13, 34 und 55 sind doch alles Fibonacci-Zahlen! Kann es wirklich sein dass die Anzahl dieser „Phyllotaxis-Spiralen“ immer eine Fibonacci-Zahl ist? Wie ist das möglich?

Wir werden sehen, dass elementare biologische und mathematische Grundkenntnisse ausreichen, um dieses verblüffende Phänomen zu erklären. Es ist ein besonders schönes Beispiel dafür, wie die empirische Beobachtung und die mathematische Analyse in der Lage sind, Phänomene der realen Welt zu erklären.

Ein Schlüssel zur Deutung des beobachteten Sachverhalts liegt in der genaueren Untersuchung der Blattfolge (im folgenden soll durchgängig dieser Begriff verwendet werden, auch wenn es sich im Einzelfall um Blütenblätter, Fruchtblände, Kerne oder sogar Zweige handeln sollte). Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass sich die Blätter bei ihrer Entstehung um den Stängel spiralförmig zu drehen scheinen. Der dabei gemessene Drehwinkel („Blattfolgewinkel“) ist konstant und beträgt bei vielen Pflanzen recht genau 137,5 Grad – bzw. 222,5 Grad in der Gegenrichtung. Dies entspricht aber ziemlich genau der Teilung des Vollwinkels nach dem goldenen Schnitt (also dem „goldenen Winkel“):

$$\varphi \cdot 360 \text{ Grad} \approx 0,618 \cdot 360 \text{ Grad} = 222,48 \text{ Grad} .$$

Die Bevorzugung des goldenen Winkels als Blattfolgewinkel wird im wesentlichen mit den folgenden beiden für die Pflanze vorteilhaften Aspekten erklärt – vgl. [Behr 1994] bzw. [Conway 1996]:

- (a) Bei diesem Blattfolgewinkel ist eine optimale Energieausbeute (Sonnenlicht) gegeben.
- (b) Bei der Entstehung neuer Blätter geht man davon aus, dass sich diese ihren Weg nach dem „Prinzip des geringsten Widerstandes“ bahnen (wobei bereits existierende Blätter eine hemmende Wirkung auf die Ausbildung neuer Blätter ausüben). Energetische Betrachtungen lassen darauf schließen, dass der goldene Winkel auch unter diesem Gesichtspunkt optimal ist.

In diesem Stadium „ruft“ die Situation geradezu nach einer Simulation (sei es mit Bleistift, Papier, und Geodreieck oder mit dem Computer). Abbildung 3.2.5.4 zeigt eine solche Computersimulation: Ausgehend von der Startrichtung „Norden“ wurden die Blätter mit dem goldenen Winkel als Blattfolgewinkel eingezeichnet. Die älteren Blätter sind etwas



Abbildung 3.2.5.2



Abbildung 3.2.5.3

größer und haben etwas längere Stängel als die jüngeren Blätter.

Obwohl völlig künstlich, vermittelt das Simulationsergebnis den deutlichen Eindruck einer Blume oder Pflanze und bekräftigt damit auch die Hypothese über die „Geometrie“ der Pflanze und die Rolle des goldenen Winkels als Blattfolgewinkel.

Abbildung 3.2.5.4 enthält viele Spiralen; so liegt z.B. auch die Gesamtheit aller Blätter in der natürlichen zeitlichen Abfolge 1, 2, 3, ... auf einer Spirale, aber wir müssen uns schon sehr anstrengen, um diese Spirale zu „sehen“. Wo wir Spiralen sehen (bzw. sehen wollen), hängt massiv von unserer persönlichen Wahrnehmung ab, die allerdings nicht völlig willkürlich ist. Einige der Spiralen sind von jedermann deutlich zu erkennen. Eine davon wird z.B. von den Blättern 1, 14, 27, 40, 53, 66 gebildet; eine andere von den Blättern 1, 22, 43, 64. (Wir haben dabei die Blickrichtung geändert und verfolgen die Spiralen, in der Reihenfolge ihrer Entstehung, „von außen nach innen“). Wir wollen uns im folgenden auf die erste dieser beiden Spiralen konzentrieren.

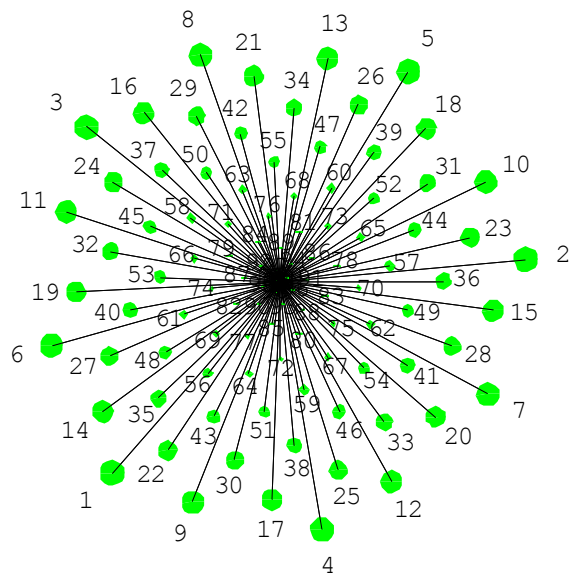


Abbildung 3.2.5.4

Der Grund dafür, dass wir bestimmte Spiralen deutlicher sehen als andere liegt auf der Hand: visuell gut erkennbare Spiralen liegen dann vor, wenn hinreichend viele Blätter auf der Spirale liegen, wenn die aufeinanderfolgenden Blätter „dicht“ beieinander liegen und wenn sich keine „Fremdblätter“ zwischen die Blätter auf einer Spirale drängen. Dies setzt insbesondere voraus, dass die Stängel benachbarter Blätter auf einer Spirale einen möglichst kleinen Winkel miteinander bilden.

Die Spirale, auf der die Blätter 1, 14, 27, 40, 53, 66 liegen, erfüllt diese Anforderungen. Nach der Entstehung von Blatt 1 dreht sich der „Blattstandszeiger“ 13 mal (um den goldenen Winkel, im Uhrzeigersinn) bis er auf der Position von Blatt 14 zu stehen kommt. Er überstreicht dabei einen Gesamtwinkel von

$$13 \cdot \varphi \cdot 360 \text{ Grad} \approx 2892,24 \text{ Grad}.$$

Dabei überstreicht er, ausgehend von Blatt 1, 8-mal den Vollkreis (360 Grad), um dann mit einem kleinen Überschußwinkel von 12,24 Grad (relativ zu Blatt 1) auf der Position von Blatt 14 stehen zu bleiben:

$$2892,24 = 8 \cdot 360 + 12,24.$$

Blatt 14 fällt also fast auf die Position von Blatt 1; die Winkeldifferenz von 12,24 Grad entspricht 3,4 % des Vollkreises. Bei Blatt 14 (und in der Folge ebenso bei Blatt 27, 40, 53, 66, ...) schießt der Blattstandszeiger ein wenig (um etwa 12 Grad) über die Position des „Vorgänger“-Blattes hinaus. Dies vermittelt den optischen Eindruck,

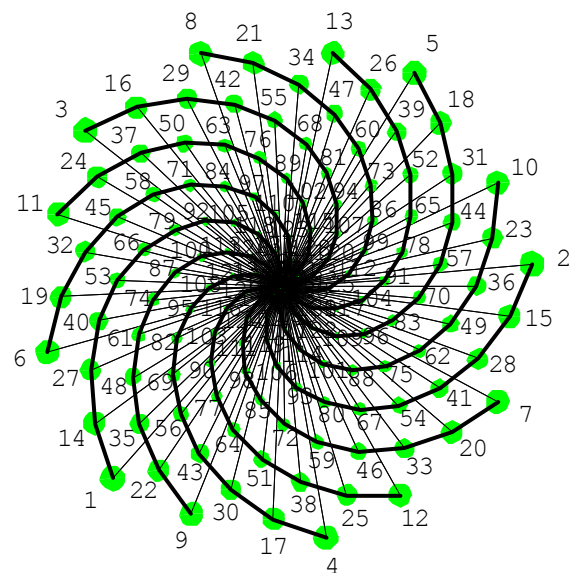


Abbildung 3.2.5.5

dass sich die Spirale 1-14-27-53-66-... (von außen nach innen betrachtet) nach rechts dreht (von innen nach außen gesehen, dreht sie sich nach links).

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$13 \cdot \varphi \cdot 360 \approx 8 \cdot 360, \text{ also } 13 \cdot \varphi \approx 8 \text{ bzw. } \varphi \approx \frac{8}{13}.$$

Aus dieser Betrachtung wird klar, warum die Blätter auf den gut sichtbaren Spiralen als Abstand jeweils Fibonacci-Zahlen haben (13 bzw. 21): Weil die Folge der Quotienten aus aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen den goldenen Schnitt als Grenzwert hat, eignen sich Zahlenpaare (k, n) aus aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen besonders gut zur Annäherung des (goldenen) Blattfolgewinkels von $\varphi \cdot 360$ Grad:

$$\varphi \approx \frac{k}{n}, \quad \text{also} \quad \varphi \cdot 360 \approx \frac{k}{n} \cdot 360 \quad \text{bzw.} \quad n \cdot \varphi \cdot 360 \approx k \cdot 360$$

Die n Drehungen des Blattstandzeigers jeweils um den goldenen Winkel von $\varphi \cdot 360$ Grad entsprechen also näherungsweise k Volldrehungen um 360 Grad. Dies ist genau die Voraussetzung dafür, dass das Blatt $n+1$ nach k Volldrehungen des Blattstandzeigers nahezu in der Richtung von Blatt 1 zu liegen kommt; und dies ist wiederum die Voraussetzung dafür, dass wir die Lage dieser Blätter als „Spirale“ ansehen.

Günstige Bedingung für eine Spirale ist also der Umstand, dass die aufeinanderfolgenden Blattzahlen als Abstand eine Fibonacci-Zahl haben. Dies wiederum hat nun aber zur Folge, dass es ebenso viele Spiralen gibt. Denn ebenso wie Blatt 1 Ausgangspunkt der Spirale 1, 14, 27, 40, 53, 66 ist, ist jedes der dazwischen liegenden Blätter 2, 3, 4, ..., 12, 13 der Ausgangspunkt einer entsprechenden Spirale. Mit der ersten haben wir insgesamt also 13 ($= F_7$) Spiralen, welche die Blume in der obigen Abbildung komplett ausfüllen.

Für die aus den Blättern 1, 22, 43, 64, ... (mit Blattabstand 21) bestehende Spirale gelten ganz entsprechende Überlegungen; nur dass in diesem Fall nach 21 Drehungen des Blattstandzeigers der Vollwinkel „nicht ganz“ erreicht wird:

$$21 \cdot \varphi \cdot 360 \text{ Grad} \approx 4672,08 \text{ Grad}$$

$$4672,08 = 13 \cdot 360 - 7,92$$

(d.h. $21 \cdot \text{Goldener Winkel} \approx 13 \cdot \text{Vollkreis}$).

Die Differenz (in diesem Fall „Unterdeckung“) von 7,92 Grad macht 2,2 % des Vollkreises aus. Der Blattabstand von 21 ist der Grund dafür, dass es in diesem Fall 21 ($= F_8$) Spiralen gibt. Bei Blatt 22 (und in der Folge ebenso bei Blatt 43, 64, 85, ...) blieb der Blattstandszeiger ein wenig (etwa 8 Grad) vor der Position des „Vorgänger“-Blattes stehen. Dies vermittelt den optischen Eindruck, dass sich die Spirale 1-22-43-64-85-... (von außen nach innen betrachtet) nach links dreht (von innen nach außen gesehen, dreht sie sich nach rechts).

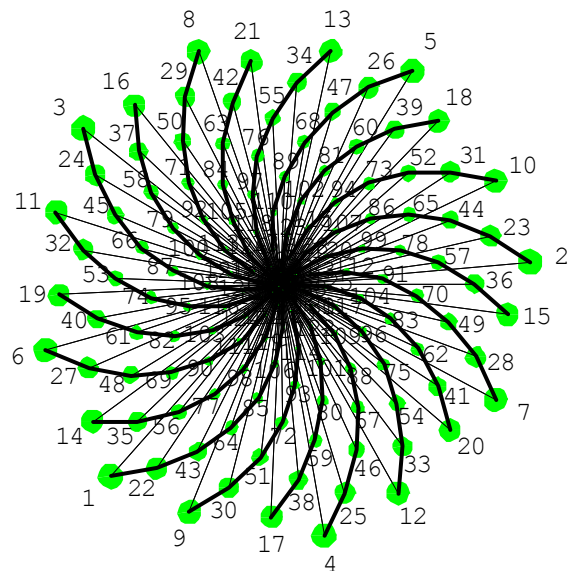


Abbildung 3.2.5.6

Literatur zum Thema Phyllotaxis:

Behr R.: Neue Erkenntnisse über die Mathematik der Pflanzenblattstellung (Phyllotaxis);
MNU 47/2 (1994), Seite 67-73

Conway J. H. / Guy R. K.: The Book of Numbers; Springer Verlag (Copernicus Imprint),
New York 1996

Prusinkiewicz P. / Lindenmayer A.: The Algorithmic Beauty of Plants; Springer Verlag,
New York 1990

Stewart I.: Nature's Numbers; London 1995

3.2.6 Aufgaben zur Vertiefung

F11: Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

F12: Betrachten Sie die folgenden Summen:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \cdot 1! \\ P_2 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! \\ P_3 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! \\ P_4 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! \\ P_5 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! \end{aligned}$$

Berechnen Sie konkrete Zahlenwerte und zeigen Sie: $P_n = (n+1)! - 1$.

F13: Betrachten Sie die folgenden Summen:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \cdot 2 \\ S_2 &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ S_3 &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ S_4 &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \\ S_5 &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{aligned}$$

Berechnen Sie konkrete Zahlenwerte, stellen Sie eine „allgemeine Formel“ für S_n auf und beweisen Sie diese.

F14: Mit den Fibonacci-Zahlen läßt sich herrlich spielen. So beruht z.B. das folgende „Flächenzerlegungs-Paradoxon“ $64 = 65$ (!) auf der Gleichung:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}. \quad (*)$$

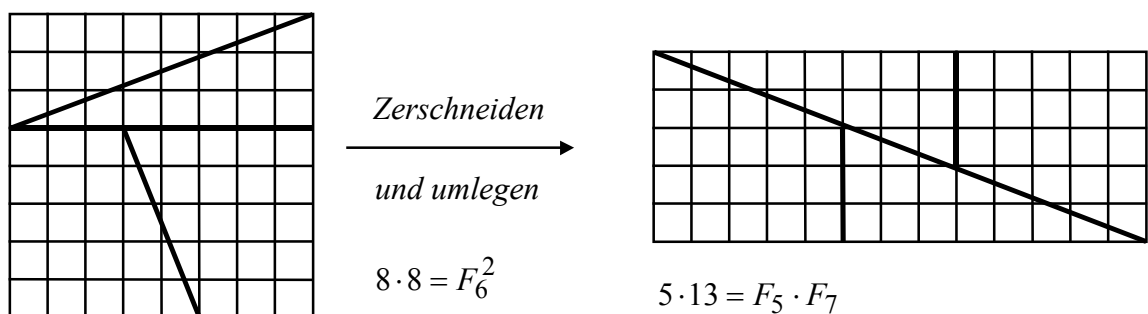


Abbildung 3.2.6.1

Beweisen Sie die Gleichung (*) mit vollständiger Induktion.

Tipp: Zerlegen Sie im Induktionsschluss $F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot (F_{k-1} + F_k)$, multiplizieren Sie aus und wenden Sie die Induktionsannahme an.

Analysieren Sie das Flächenzerlegungs-Paradoxon und konstruieren Sie mit Hilfe der Gleichung (*) weitere derartige Zerlegungs-Paradoxa.

F15: Zeigen Sie (mit Hilfe von vollständiger Induktion): Zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen sind stets teilerfremd.

F16: Die Zahl g (mit $|g| < 1$) sei eine Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$.

Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion für $n \geq 2$: $F_n \cdot g = F_{n-1} - (-g)^n$.

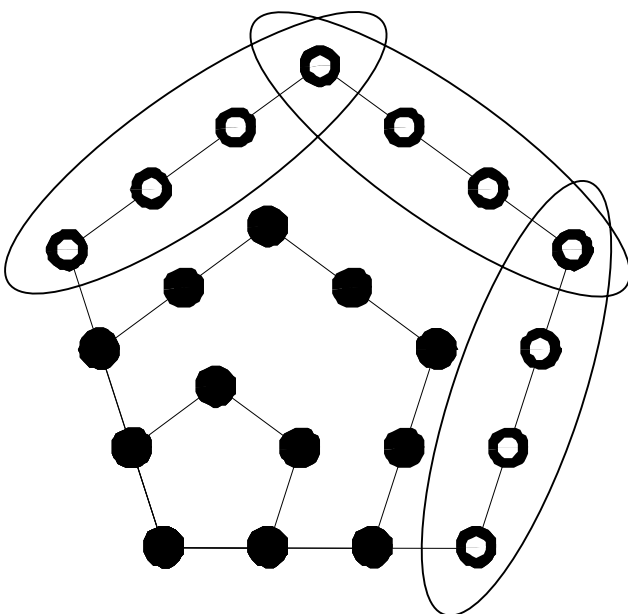
Folgern Sie daraus: Die Folge der Quotienten $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ konvergiert gegen g .

F17: Figurierte Zahlen – Polygonalzahlen (vergleiche auch Abschnitt 1.2.3)

Jede Polygonalzahl ist durch zwei Parameter gekennzeichnet: Die *Eckenzahl* E des jeweiligen Polygons und die *Stufe* k , in der es betrachtet wird (dabei sei stets $E \geq 3$ und $k \geq 1$). Mit $G(E, k)$ sei die Polygonalzahl bezeichnet, die zu einem Polygon mit E Ecken in der Stufe k gehört.

In der Stufe $k = 1$ besteht jedes Polygonalzahl-Punktmuster aus genau einem Punkt, d.h. es ist: $G(E, 1) = 1$. Es sei nun $k \geq 2$. Das Punktmuster zur Polygonalzahl $G(E, k)$ entsteht aus dem Punktmuster zur Polygonalzahl $G(E, k-1)$, indem man an $E - 2$ Seiten einen „offenen Kranz“ neuer Punkte so an das alte Punktmuster anlegt, dass die Randpunkte der Figur ein (regelmäßiges) E -Eck bilden, auf dessen Seiten jeweils k Punkte liegen.

Beispiel: Die Entstehung der vierten Fünfeckszahl („Pentagonalzahl“) $G(5, 4)$ aus ihrem Vorgänger $G(5, 3)$:



Beispiel

Fünfeckszahlen: $E = 5$

„offener Kranz“: an $E - 2 = 3$ Seiten

Abbildung 3.2.6.2

Die folgende Tabelle zeigt Anfangsstücke der Polygonalzahlen. Die Spaltenüberschriften zeigen die jeweilige Stufe k , die linke Spalte zeigt die Eckenzahl E .

Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle und suchen Sie nach Gesetzmäßigkeiten.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
4	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
5	1	5	12	22	35	51									
6	1	6	15	28	45										
7	1	7	18	34											
8	1	8	21												
9	1	9													
10	1	10													
11	1	11													
12	1	12													

Die oben gegebene Konstruktionsvorschrift für die Polygonalzahlen ist *rekursiv*: zur Beschreibung des Punktmusters in der Stufe k wird auf das Punktmuster in der Stufe $k-1$ zurückgegriffen. Im folgenden betrachten wir Polygonalzahlen zu einer *festen* Eckenzahl E und schreiben kurz G_k an Stelle von $G(E, k)$.

Begründen Sie die Gleichung:

$$G_k = G_{k-1} + (E - 2) \cdot k - (E - 3) \quad (\text{POLY-1})$$

Hinweis: Abbildung 3.2.6.2

Folgen, etwa wie (POLY-1), haben einen deutlichen Aufforderungscharakter, einfach einmal „loszurechnen“, sich „hochzuhangeln“:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 1 \\
 G_2 &= G_1 + (E - 2) \cdot 2 - (E - 3) \\
 G_3 &= G_2 + (E - 2) \cdot 3 - (E - 3) \\
 G_4 &= G_3 + (E - 2) \cdot 4 - (E - 3) \\
 G_5 &= G_4 + (E - 2) \cdot 5 - (E - 3) \\
 &\dots \\
 G_{k-1} &= G_{k-2} + (E - 2) \cdot (k - 1) - (E - 3) \\
 G_k &= G_{k-1} + (E - 2) \cdot k - (E - 3)
 \end{aligned} \quad (\text{POLY-2})$$

Die Gleichungen (POLY-2) lassen eine Regelmäßigkeit erkennen, die noch gesteigert wird, wenn man die erste Gleichung folgendermaßen schreibt:

$$G_1 = (E - 2) \cdot 1 - (E - 3)$$

Leiten Sie durch „Aufsummieren“ der Gleichungen in (POLY-2) die folgende explizite Darstellung von G_k her:

$$G_k = \frac{E-2}{2} \cdot k^2 + \frac{4-E}{2} \cdot k$$

F18: Figurierte Zahlen – Pyramidalzahlen

Ordnet man die Polygonalzahlen räumlich an, so erhält man die *Pyramidalzahlen*. Die folgende Abbildung zeigt die „Stapelung“ von Dreieckszahlen zur Pyramide der Tetraederzahlen.

Beispiel: Der räumliche Aufbau von Dreieckszahlen ergibt die *Tetraederzahlen*

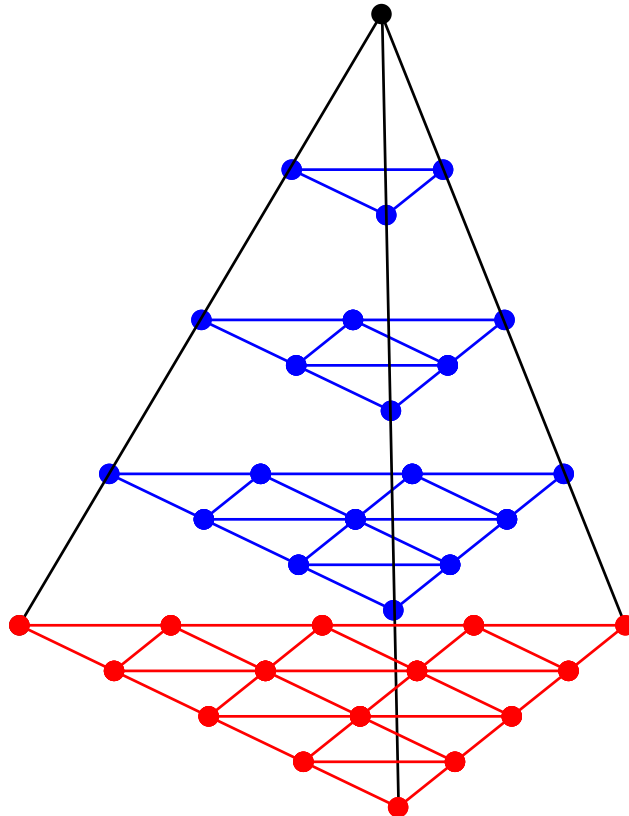
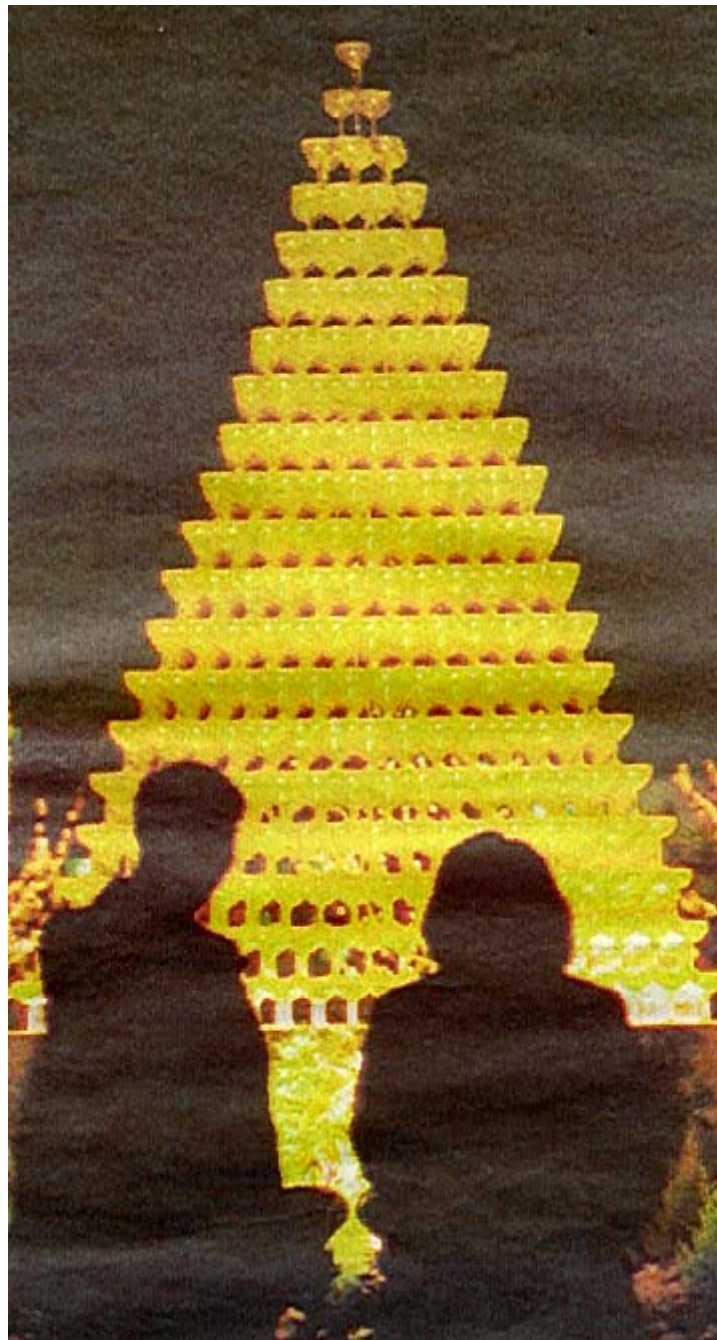


Abbildung 3.2.6.3

Pyramidalzahlen treten u.a. in turmartigen Konstruktionen auf, wie dem in der folgenden Abbildung dargestellten „Sekt-Turm“.



Der etwas andere Weihnachtsbaum in Tokio
Aus 3000 Champagnergläsern besteht dieser Weihnachtsbaum, der momentan in einem Park der japanischen Hauptstadt Tokio leuchtet.
(Sonntag Aktuell, 7. Dez. 1997)

Abbildung 3.2.6.4

Prüfen Sie, ob die angegebene Zahl der Champagnergläser stimmen kann.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Form die „Grundfläche“ der Pyramide haben kann.

Die folgende Tabelle zeigt Anfangsstücke der Pyramidalzahlen. Die Spaltenüberschriften zeigen die jeweilige Stufe k , die linke Spalte zeigt die Eckenzahl E der Grundfläche.

Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle und suchen Sie nach Gesetzmäßigkeiten.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
4	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	819	1015	1240
5	1	6	18	40	75										
6	1	7	22	50											
7	1	8	26												
8	1	9													
9	1	10													
10	1	11													
11	1	12													
12	1	13													

Entsprechend der Konstruktionsvorschrift lautet die „natürliche“ Rekursionsgleichung für die Pyramidalzahlen für die Pyramide mit einem E -Eck als Grundfläche in der Stufe k :

$$H(E, 1) = 1$$

$$H(E, k) = H(E, k - 1) + G(E, k)$$

Entwickeln Sie eine Darstellung von $H(E, k)$ in geschlossener Form; also eine nichtrekursive Darstellung, d.h. eine Darstellung, bei der die Funktion H auf der rechten Seite nicht vorkommt.

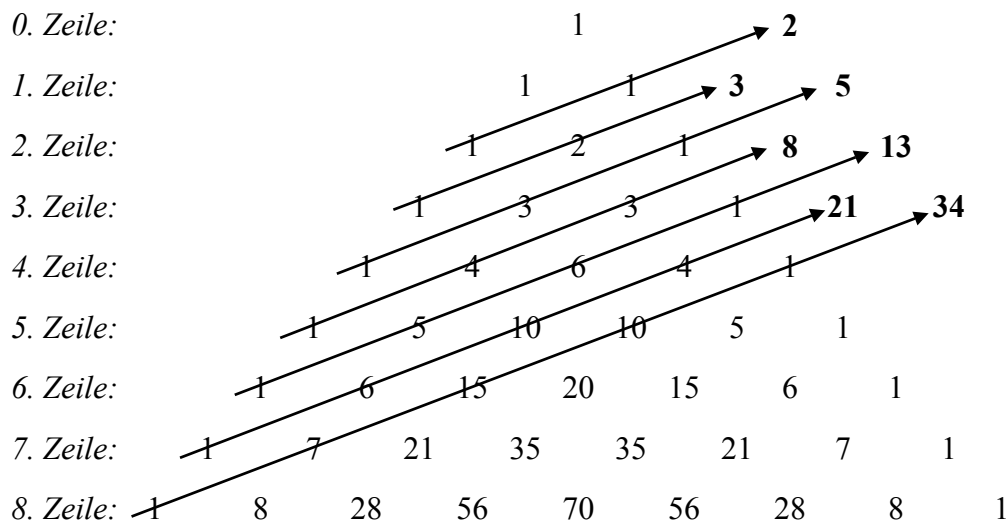
F19: In einer Ebene liegen n Geraden in „allgemeiner Lage“ (d.h.. je zwei der Geraden schneiden sich und je drei haben keinen Punkt gemeinsam).

Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion: Die n Geraden zerlegen die Ebene in

$$1 + \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \text{ Teilflächen.}$$

F20: *Das Pascalsche Dreieck und die Fibonacci-Zahlen*

Wenn man etwas mit den Zahlen im Pascalschen Dreieck spielt, so hat man die Chance, eine Reihe interessanter Entdeckungen zu machen; so z.B. auch die folgende: Legt man, wie in der folgenden Abbildung, schräge „Pfeile“ durch das Pascalsche Dreieck und addiert man die auf einem Pfeil stehenden Zahlen auf, so erhält man als Summen offenbar gerade die Fibonacci-Zahlen (zumindest, so weit sich das empirisch überprüfen läßt).



Es drängt sich die Frage auf, ob der Zusammenhang auch weiterhin gilt und ob er ggf. durch Rückgriff auf die Bildungsgesetze der Fibonacci-Zahlen und der Zahlen im Pascalschen Dreieck einsichtig zu machen ist. Untersuchen Sie, ob die beobachtete Gesetzmäßigkeit auch für weitere derartige schräge Pfeillinien gilt. Formulieren Sie den vermuteten Sachverhalt in allgemeiner Form.

Die folgende Abbildung gibt einen deutlichen Hinweis auf den Zusammenhang zwischen dem Pascalschen Dreieck und den Fibonacci-Zahlen. Bauen Sie darauf eine allgemeine Begründung für den vermuteten Zusammenhang auf.

