Fachdidaktische Prinzipien als Grundlagen einer Design Science erläutert am Hankelschen Permanenzprinzip

Jochen Ziegenbalg, Karlsruhe

Herrn Kollegen Erich Ch. Wittmann zum 60. Geburtstag gewidmet

Wenn die Didaktik der Mathematik, wie Erich Wittmann in [Wittmann 1992] sagt, eine „Design Science" ist, dann sind die Grundprinzipien des Designs ihre fachdidaktischen Prinzipien. Man könnte argumentieren, daß einige dieser Prinzipien, so insbesondere das „Permanenzprinzip", mathematische Prinzipien und nicht etwa mathematikdidaktische Prinzipien sind. So stammt eine frühe Formulierungen des Permanenzprinzips von dem englischen Mathematiker *G. Peacock* (1791–1858) aus dem Jahre 1834 (er bezeichnete es als das *principle of the permanence of equivalent forms*). Heute wird das Permanenzprinzip meist mit dem Namen des Tübinger Mathematikers *Hermann Hankel* (1839–1873) identifiziert, durch dessen Formulierung im Jahre 1867 es zum allgemein anerkannten heuristischen Prinzip wurde. Peacock und Hankel haben das Permanenzprinzip dabei weniger „erfunden" als eher *explizit* und *bewußt* gemacht, denn *implizit* lag es in vielen Fällen (man könnte sogar sagen „in der Regel") der Einführung neuer Begriffe und Definitionen in der Mathematik schon sehr viel früher zugrunde. Hankel schreibt in einer historischen Würdigung seiner Arbeit zum Permanenzprinzip in seinen *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* [Hankel 1867]: „Wenn nun hienach der Gedanke, die allgemeine Arithmetik und Algebra unter dem höheren Gesichtspunkte einer formalen Mathematik, zu der das Princip der Permanenz ihrer formalen Gesetze führt, anzusehen, nicht absolut neu ist, so darf doch die ganze Art und Weise, in der ich denselben für

Hermann Hankel (1839–1873)

die elementarsten und ältesten Theile der Mathematik ebenso wie ihre schwierigsten und neuesten Theorieen fruchtbar gemacht und systematisch durchgeführt habe, als neu und selbstständig bezeichnet werden."

Hermann Hankel spricht vom „*hodegetischen*[1] Princip der Permanenz der formalen Gesetze" und formuliert:

> *„Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen."*

Obwohl Hankel das Gesetz zunächst im arithmetischen Kontext formuliert, so erweitert er es doch sogleich: „Wir haben bisher nur von dem Beharren der *arithmetischen* Formeln gesprochen. Doch müssen wir hier schon aufmerksam machen auf den allgemeinen Werth, den das Princip der Permanenz formaler Gesetze als ein methodologisches für die ganze Mathematik hat ..."

Wenn man davon ausgeht, daß mit der Formulierung von derartigen Prinzipien das Ziel verfolgt wird, allgemeine mathematische Vorgehensweisen zu verdeutlichen, explizit, bewußt und nicht zuletzt auch *lehrbar* zu machen, so entspringt dies einer fachdidaktischen Motivation (auch wenn es z.B. zur Zeit Hankels den Begriff der Fachdidaktik in unserer heutigen Form gar nicht gab). Auf diese Weise leisteten (und leisten) immer wieder auch Mathematiker Beiträge zur Fachdidaktik – ob bewußt oder nicht sei dahingestellt.

Zur Rolle des Permanenzprinzips im Mathematikunterricht

Ein spezifischer Bereich, wo es dem Mathematikunterricht bisher in der Regel nicht gelungen ist, die „Vernünftigkeit" mathematischer Vorgehensweisen zu verdeutlichen, ist der Bereich der mathematischen Definitionen – insbesondere in Rand- und Sonderfällen. Ein fast schon klassisches Beispiel dafür ist die Definition der „nullten" Potenz a^0 einer (von Null verschiedenen) reellen Zahl *a*.

Ein hypothetisches (wenn auch nicht authentisches, so doch typisches) Unterrichtsgespräch zur Unterrichtseinheit „Potenzen" könnte sich etwa folgendermaßen entwickeln:

Lehrer: Aus der Flächenlehre wißt ihr, daß ein Quadrat mit der Seitenlänge $5\,m$ den Flächeninhalt $5m \cdot 5m$ hat, also $25\ qm$. Die Zahl 25 ergibt sich aus $5 \cdot 5$; an Stelle von qm wird auch m^2 geschrieben.

Welchen Rauminhalt hat wohl ein Würfel der Seitenlänge $5\,m$?

Schüler: 125 Kubikmeter

Lehrer: Wie kommst du zu der 125?

Schüler: Dreimal die Fünf.

[1] *Hodegetria* (griechisch): Wegführerin; *Hodegetik*: Anleitung zum Studium eines Wissens- oder Arbeitsgebietes

Lehrer (hat es aufgegeben, von den Schülern einen vollständigen Antwortsatz zu verlangen): Was ist drei mal Fünf?

Schüler: $5 \cdot 5 \cdot 5$ habe ich gemeint.

Lehrer: So ist es richtig. Und für Kubikmeter schreibt man auch m^3, denn *ein* Kubikmeter ist der Rauminhalt von einem Würfel mit der Seitenlänge $1\ m$ und sein Rauminhalt berechnet sich aus $1\,m \cdot 1\,m \cdot 1\,m$, also $1\ m \cdot m \cdot m$ und dafür schreibt man auch $1\,m^3$.

Man verwendet die „hoch"-Schreibweise auch für Zahlen, denn das ist praktisch; also z.B.:

$$5^2 = 5 \cdot 5$$

und $$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5\ .$$

Was ist wohl 5^4 ?

Schüler: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Lehrer: Und wie geht es weiter?

Er bereitet eine Tabelle an der Tafel vor, die von den Schülern ausgefüllt wird, etwa mit dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} 5^2 &= 5 \cdot 5 \\ 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5^4 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5^5 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5^6 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

...

Lehrer (zeigt auf die 5^6): Schaut her, die Sechs wird rechts oberhalb von der Fünf geschrieben – und etwas kleiner. Man nennt die Sechs auch die *Hochzahl* und die Zahl Fünf die *Grundzahl* oder auch die *Basis*.

Was gibt die Hochzahl also an?

Schüler: Wie oft man die Basis mit sich selbst multiplizieren muß.

Lehrer: Ich sehe, Ihr habt es verstanden. Wir wollen dazu man einen Merksatz aufschreiben. Aber an Stelle von 5 schreiben wir dabei a und an Stelle von 6 schreiben wir *n*.

> *Merke:*
>
> a^n ist ein Produkt, bei dem der Faktor a n-mal mit sich selbst multipliziert wird.

Lehrer: Was ist also 5^1 ?

Schüler (etwas herablassend): 5

Lehrer: Warum?

Schüler: Die 5 kommt ja nur einmal als Faktor vor. Es steht also nur die 5 da. Und das ist 5.

Lehrer: Und was ist 5^0 ?

Schüler: Null, denn da steht gar kein Faktor da und wenn nichts da steht, ist es Null.

Lehrer (betont verständnisvoll): Du hast gar nicht so Unrecht. Aber bei 5^0 ist das mit den Faktoren anders. Da haben die Mathematiker einfach festgelegt, daß es 1 sein soll; also merkt euch für die Zukunft (doppelt unterstrichen):

$$\underline{\underline{5^0 = 1}} \quad !!!$$

Warum die Mathematiker das so festgelegt haben, lernt Ihr später. Definieren kann man ja alles. Bei „hoch Null“ haben sie es eben so gemacht.

Mancher Mathematikunterricht vermittelt so den Eindruck, daß in der Mathematik vieles künstlich oder willkürlich ist; besonders, was die Begriffe und Definitionen betrifft. Daß jede Definition in der (Elementar-) Mathematik einen ganz bestimmten Sinn hat und weit davon entfernt ist, willkürlich zu sein, scheint nicht zum mathematischen Allgemeinwissen zu gehören. In einer Vorlesung sagte ich einmal vor Lehramtsstudenten an ähnlicher Stelle (vielleicht etwas pauschal und unvorsichtig), daß jede Definition in der Mathematik sinnvoll sei. Ich erntete großes Gelächter. Daraufhin setzte ich spontan einen Preis aus: Für jede nicht sinnvolle Definition, die mir die Hörer vorlegten, würde ich 10 DM zahlen. Ich habe bisher noch keine einzige Mark zu bezahlen brauchen.

Zurück zum Permanenzprinzip von Hankel: Die *Leitidee* für die Definition von a^0 ist der Wunsch, dem Potenzgesetz

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

dessen Gültigkeit für positive ganze Zahlen leicht zu begründen ist, weiterhin zur Gültigkeit zu verhelfen. Denn dieses Gesetz ist die Grundlage für viele weitere Theorien in der Mathematik; es wird sehr oft angewandt und es wäre außerordentlich mißlich, wenn man vor jeder Anwendung erst einmal überprüfen müßte, ob alle Exponenten positiv sind oder nicht.

Da man also die Freiheit hat, einen Wert für a^0 festzulegen, tut man das so, daß nach Möglichkeit das Potenzgesetz auch für die Hochzahl Null gilt, und daraus folgt eben, daß a^0 als 1 festzusetzen ist; etwa durch das folgende Argument:

Aus $a^m = a^{0+m} = a^0 \cdot a^m$ (für beliebiges *m*) folgt sofort $a^0 = 1$.

Während die Argumentation auf der Basis des Potenzgesetzes Mathematikern meist sofort einleuchtet, tun sich Nichtmathematiker (zu denen hier auch die Schüler gezählt werden) mit dieser Begründung in der Regel erheblich schwerer. Dies hat vermutlich mehrere Ursachen; eine davon liegt sicher an dem vergleichsweise hohen Abstraktionsniveau – und damit verbunden – an dem hohen sprachlich-syntaktischem Niveau der Begründung: Mathematische Gesetze, wie das Potenzgesetz, sind in der Regel All-Aussagen und als solche (nicht zuletzt wegen der dabei automatisch auftretenden Quantoren und Variablen) von komplexer sprachlicher Struktur. Aber auch die

Wertschätzung für die möglichst universelle Gültigkeit mathematischer Gesetze ist bei Schülern (und auch Studierenden) i.a. nicht so stark ausgeprägt wie bei Mathematikern.

Deshalb verwende ich in Lehrveranstaltungen (zusätzlich) meist eine Variante des Permanenzprinzips, die sogenannten *Permanenzreihen*.

In der folgenden Tabelle ist eine typische Begründung für die Definition von a^0 anhand eines Permanenzreihenarguments skizziert.

Permanenz-Regel für die erste Zeile: die Zahl wird jeweils durch 10 dividiert							
1. Zeile:	1000000	100000	10000	1000	100	10	1
2. Zeile:	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Permanenz-Regel für die zweite Zeile: die Hochzahl nimmt jeweils um 1 ab							

Natürlich ist dies nur eine „paradigmatische“ Begründung, denn sie erfolgt ja nur anhand des Spezialfalls $a = 10$. Alle bisherigen Erfahrungen zeigen jedoch, daß die Überzeugungskraft für die „Richtigkeit“ der Definition $a^0 := 1$ anhand der Verwendung von Permanenzreihen in der Regel höher ist als die Begründung durch die Potenzgesetze.

Entsprechendes gilt im Hinblick auf die Begründung des Rechengesetzes „Minus mal Minus ergibt Plus“ anhand der folgenden Permanenzreihen.

Permanenz-Regel für die erste Zeile: der zweite Faktor nimmt jeweils um 1 ab							
1. Zeile	4•3	4•2	4•1	4•0	4• (-1)	4• (-2)	4• (-3)
2. Zeile	12	8	4	0	-4	-8	-12
Permanenz-Regel für die zweite Zeile: das Ergebnis nimmt jeweils um 4 ab							

Die obige Permanenzreihe liefert also eine paradigmatische Begründung der Regel (für natürliche Zahlen a und b): $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

Permanenz-Regel für die erste Zeile: der erste Faktor nimmt jeweils um 1 ab									
1. Zeile:	4•(-3)	3• (-3)	2• (-3)	1• (-3)	0• (-3)	(-1) • (-3)	(-2) • (-3)	(-3) • (-3)	(-4) • (-3)
2. Zeile:	-12	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+12
Permanenz-Regel für die zweite Zeile: das Ergebnis nimmt jeweils um 3 zu									

Die letztere Permanenzreihe liefert schließlich eine paradigmatische Begründung der Regel (für natürliche Zahlen a und b): $(-a)\cdot(-b) = +(a\cdot b)$

Ein Problem mit mathematikdidaktischen Prinzipien (so z.B. auch mit dem Permanenzprinzip) ist, daß Situationen auftreten können, wo die „naive" Anwendung des Prinzips zu Konflikten führen kann. Solche Konflikte lassen sich oft auch gut mit Hilfe der Permanenzreihen aufdecken und aufzeigen. So führt die z.B. die Permanenzreihe, mit der die Definition $a^0 := 1$ begründet wurde, für die Basis $a = 0$ zu der Wunschvorstellung $0^0 := 1$, während die Permanenzreihe

Permanenz-Regel für die erste Zeile: der Exponent nimmt jeweils um 1 ab						
1. Zeile:	0^5	0^4	0^3	0^2	0^1	0^0
2. Zeile:	0	0	0	0	0	0
Permanenz-Regel für die zweite Zeile: der Wert ist jeweils konstant gleich 0						

eine Motivation für die Definition $0^0 := 0$ ergäbe. Auch andere "unbestimmte" Ausdrücke, wie etwa der Ausdruck $\frac{0}{0}$ lassen sich auf ähnliche Weise als Konfliktfälle zwischen konkurrierenden Permanenzreihen deuten: Während die Reihe $\left(\frac{a}{x}\right)$ für immer kleiner werdendes (positives) x gegen unendlich strebt, ist jeder Wert der Reihe $\left(\frac{0}{x}\right)$ für jedes (von Null verschiedene) x gleich Null. (Der "Reihencharakter" dieses Arguments wird besonders deutlich, wenn man für x etwa die Werte $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ einsetzt.)

Schlußbemerkung

Design hat es auch mit Ästhetik zu tun. Erstaunlicherweise sind die mathematisch / mathematikdidaktischen Designprinzipien und insbesondere das Permanenzprinzip selten unter ästhetischen Gesichtspunkten diskutiert worden. Dabei liegt der ästhetische Charakter doch eigentlich auf der Hand: Das Permanenzprinzip dient auch und insbesondere dem Zweck, „schöne“, elegante Sätze und Gesetze zu ermöglichen. Man stelle sich z.B. im Zusammenhang mit dem Potenzgesetz vor, als Wert von a^0 wäre 0 definiert worden. Die Konsequenzen sowohl für das Potenzgesetz, wie auch für alle weiteren mathematischenSätze, in denen das Potenzgesetz eine Rolle spielt, wären nicht auszudenken.

Definitionen sind in naheliegender Weise Bestandteil des Wissenschaftsdesigns von Mathematik und Mathematikdidaktik. Der ästhetischen Seite der Mathematik wird häufig in knappen, aphoristischen Äußerungen Rechnung getragen. Einen vergleichsweise hohen Bekanntheitsgrad hat das folgende G. H. Hardy zugeschriebene Zitat erlangt: *Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.*

Einer der wenigen Autoren, die sich im Rahmen der Diskussion der ästhetischen Seite der Mathematik auch mit der Frage der Ästhetik von mathematischen Definitionen beschäftigt hat, ist Gian-Carlo Rota. In [Rota 1997, S. 122] schreibt er: *It is not uncommon for a definition to seem beautiful, especially when it is new. However, mathematicians are reluctant to admit the beauty of definitions; it would be interesting to investigate the reasons for this reluctance. Even when not explicitly acknowledged as such, beautiful definitions give themselves away by the success they meet. A peculiarity of twentieth century mathematics is the appearance of theories where the definitions far exceed the theorems in beauty.*

Literatur

Hankel, Hermann: Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen in zwei Theilen 1. Theil: Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867

Rota, Gian-Carlo: Indiscrete Thoughts, Boston 1997

Wittmann, Erich Ch.: Mathematikdidaktik als ‘design science‘, Journal für Mathematikdidaktik 13, 55-70, Paderborn 1992